الرياضيات

الأستاذ

محمد حميد

0770 710 5007

t.me/mohhmath



الفصل الاول

الاعداد المركبة

الاستاذ محمد حميد

الإهداء

الى سيدي ومولاي سبط الرسول محمد (صلى اللّٰه عليه وآله) الامام الحسين (عليه السلام) أهدي هذا العمل المتواضع ... سائلاً اللّٰه (عز وجل) أن يقبله عنده ويجعل لي عنده قدم صدق مع الحسين وأصحاب الحسين الذين بذلوا مهجهم دون الحسين (ع)



الاعداد المركبة ***complex numbers***

تعريف : يسمى العدد المكتوب بالصيغة $\mathbb{C} = a + bi$ حيث ان $a , b \in \mathrm{R}$ عددان حقيقيان $i = \sqrt{-1}$ يسمى عددا مركبا ، حيث ان a جزءه الحقيقي Real part ويسمى b جزءه التخيلي Imaginary part ويرمز الى مجموعة الاعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$ ويقال للصيغة $a + bi$ الصيغة العادية او الجبرية للعدد المركب وكذلك للعدد المركب اكثر من صيغة حيث يكتب بشكل زوج مرتب (a , b) وتسمى بالصيغة الديكارتية للعدد المركب .

مثال : (1) العدد $6 - 3i$ عدد مركب جزءه الحقيقي 6 وجزءه التخيلي -3

(2) العدد -8 عدد مركب جزءه الحقيقي -8 وجزءه التخيلي 0

ويسمى العدد المركب الذي يحتوي على جزء واحد كالاتي :

- العدد المركب الذي يحتوي جزء حقيقي فقط يسمى (عدد حقيقي بحت) مثل هذه الاعداد $5 , -3 , 7$
- العدد المركب الذي يحتوي جزء تخيلي فقط يسمى (عدد تخيلي بحت) مثل هذه الاعداد $2i , i , 5i$

قوى i

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$i^3 = i^2 . i = (-1) . i = -i$

$i^4 = i^2 . i^2 = (-1) . (-1) = 1$

$i^5 = i^4 . i = (1) . i = i$

$i^{17} = i^{16} . i = (i^2)^8 . i = (-1)^8 . i = 1 . i = i$

$i^{15} = i^{14} . i = (i^2)^7 . i = (-1)^7 . i = -1 . i = -i$

$i^{-15} = \frac{1}{i^{15}} = \frac{i^{16}}{i^{15}} = i$

$i^{-7} = \frac{1}{i^7} = \frac{i^8}{i^7} = i$

بصورة عامة عند رفع i لعدد صحيح موجب فالناتج يكون احد عناصر المجموعة $\{-i , i , -1 , 1\}$ حيث نقسم اس (i) على 4 وباقي القسمة يكون هو أس جديد لـ i .

ملاحظة : في حالة الكسور التي تحتوي في المقام i يجب ان يكون أس العدد الذي نأخذه في البسط أكبر من أس العدد الذي في المقام ، ويجب ان يكون اسه من مضاعفات العدد (4).

مثال : أكتب ما يلي في ابسط صورة :

$i^{20} = 1$ لأن الاس من مضاعفات العدد 4 ولا يوجد باقي قسمة

$i^{58} = (i^4)^{14}.\ i^2 = (1)^{14} i^2 = -1$ $\quad [4 \times 14 = 56]$ (باقي القسمة i^2)

$i^{12n+93} = (i^4)^{3n}.\ i^{93} = (1)^{3n}.\ (i^{92}.i) = (1).\ ((i^4)^{23}.i) = i$

$i^{-13} = \frac{1}{i^{13}} = \frac{i^{16}}{i^{13}} = i^3 = -i$

ملاحظة : ان كل $i^4 = 1$ اي ان $\quad i^8 = i^4 . i^4 = 1 \times 1 = 1 \Longrightarrow i^8 = 1$

بصورة عامة فإن كل أس من مضاعفات العدد 4 هو 1

ملاحظة : يمكننا كتابة الجذر لأي عدد حقيقي سالب بدلالة (i) فمثلاً :

$\sqrt{-16} = \sqrt{16}.\sqrt{-1} = 4i \quad , \quad \sqrt{-12} = \sqrt{12}.\sqrt{-1} = 2\sqrt{3}i$

$\sqrt{-15} = \sqrt{15}.\sqrt{-1} = \sqrt{15}i$

مثال : أكتب كلاً مما يأتي بالصيغة bi

$(1)\sqrt{-3} = \sqrt{3}.\sqrt{-1} = \sqrt{3}\,i$

$(2)\sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}i$

مثال : أكتب الاعداد التالية على الصورة $a + bi$

$(a)\ -1 - \sqrt{-3} = -1 - \sqrt{3}.\sqrt{-1} = -1 - \sqrt{3}i$

$(b)\ \frac{1 + \sqrt{-25}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{25}i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{5i}{4}$

مثال : أكتب الاعداد التالية بالصيغة الجبرية للعدد المركب :

$(1)\ i^{16} = (i^4)^4 = (1)^4 = 1 = 1 + 0i$

$(2)\ i^{15} = i^{12}.i^3 = (1).(-i) = -i = 0 - i$

$(3)\ i^{-13} = \frac{1}{i^{13}} = \frac{i^{16}}{i^{13}} = i^3 = -i = 0 - i$

$(4)\ i^{-23} = \frac{1}{i^{23}} = \frac{i^{24}}{i^{23}} = i = 0 + i$

مثال : اكتب بالصيغة العادية للعدد المركب كل مما يأتي :

1) $i^2 - \sqrt{-36} = -1 - 6i$ 2) $i^5 + \sqrt{12} = i + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + i$

مصطلحات عامة : مجموعة الاعداد الطبيعية N ، مجموعة الاعداد الصحيحة Z ، مجموعة الاعداد الحقيقية R ، مجموعة الاعداد المركبة C ، الجزء الحقيقي للعدد المركب R(z) ، الجزء التخيلي للعدد المركب I(z) .

واجب : ضع كلاً مما يأتي بالصيغة العادية أو الجبرية للعدد المركب :

(1) i^{10} (3) $22 - i^3$ (4) $5 - i^{16}$ (5) $5i^{10} + i^3$

(2) i^{92} (6) $18i^8 - i^2$ (7) $(5i^{10} + i^3).i$ (8) $5i^{-4} - 3i^{-6}$

تساوي عددين مركبين

اذا كان $C_1 = a_1 + b_1 i$, $C_2 = a_2 + b_2 i$ فإن $C_1 = C_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

❖ اي اذا تساوى عددين مركبين فإن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي متساويان .

مثال : جد a , b اذا علمت ان $a + bi = -13 - 2i$

الحل : باستخدام خاصية التساوي

الجزء التخيلي $b = -2$ الجزء الحقيقي $a = -13$

مثال : جد قيمة x , y الحقيقيتين اللذان يحققان كل من المعادلات الاتية :

a) $2x - 3 + 5i = 7 + (3y + 3)i$

الحل : بإستخدام خاصية التساوي

$$2x - 3 = 7 \Rightarrow 2x = 7 + 3 \Longrightarrow 2x = 10 \Longrightarrow x = 5$$

$$3y + 3 = 5 \Rightarrow 3y = 5 - 3 \Longrightarrow 3y = 2 \Longrightarrow y = \frac{2}{3}$$

b) $2x + 3y + 15i = 6 + (3x + 4y)i$

الحل : بإستخدام خاصية التساوي

$2x + 3y = 6 \ldots\ldots\ldots (1)] \times 3$

$3x + 4y = 15 \ldots\ldots\ldots (2)] \times 2$

$6x + 9y = 18 \ldots\ldots\ldots (3)$

$\mp 6x \mp 8y = \mp 30 \ldots\ldots (4)$ بالطرح

$y = -12$ نعوض في (١)

$2x + 3(-12) = 6$

واجب

اوجد قيمة y, x

1) $(2x - 13) + (2y + x)i = -3y + 8i$

2) $(2x^2 - 3) + (y + 2x)i = -x + 5i$

3) $x^2 - 2xyi - y^2 = 12 - 16i$

$2x - 36 = 6 \Rightarrow 2x = 6 + 36 \Rightarrow 2x = 42 \overset{\div 2}{\Rightarrow} x = 21$

c) $(2y + 1) - (2x - 1)\,i = -8 + 3\,i$

الحل : بإستخدام خاصية التساوي

$2y + 1 = -8 \Rightarrow 2y = -8 - 1$

$2y = -9 \qquad \therefore y = \frac{-9}{2}$ الجزء الحقيقي

$-(2x - 1) = 3 \Rightarrow -2x + 1 = 3 \Rightarrow -2x = 3 - 1$

$-2x = 2 \overset{\div -2}{\Longrightarrow} \therefore x = -1$ الجزء التخيلي

d) $x^2 - 2\,x\,y\,i - y^2 = 4\,i - 3$

الحل : بإستخدام خاصية التساوي

$x^2 - y^2 - 2\,x\,y\,i = -3 + 4\,i$

$x^2 - y^2 = -3 \; \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$-2\,x\,y = 4 \; \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$y = \frac{4}{-2x} = \frac{-2}{x}$ من معادلة (٢) نحصل على y لنعوضها في معادلة (١)

$x^2 - (\frac{-2}{x})^2 = -3$

$x^2 - \frac{4}{x^2} = -3 \;] \;.\; x^2 \Rightarrow x^4 - 4 = -3x^2 \Rightarrow x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$

أما $x^2 + 4 = 0$ تهمل $\boxed{x^2 = -4}$ لا يمكن حلها في R

أو $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

$y = \frac{-2}{1} = -2 \qquad x = 1$ عندما

$y = \frac{-2}{-1} = 2 \qquad x = -1$ عندما

جمع وطرح الاعداد المركبة

$\forall\, C_1, C_2, C_3 \in C$ و كان , $C_1 = a + bi$, $C_2 = c + di$ فإن

1) $C_1 + C_2 = C_2 + C_1$

2) $C_1 + (C_2 + C_3) = (C_1 + C_2) + C_3$

3) $C_1+C_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

4) $C = a+bi \ \exists -C = -a-bi \quad , C+(-C) = 0$ النظير الجمعي للعدد المركب

5) $0 + C = C + 0 \quad , \quad 0 = 0 + 0i$ العنصر المحايد لعملية الجمع هو الصفر

ملاحظة : اذا كان $c = a + b\,i$ فإن نظيره الجمعي $-c = -a - bi$

مثال : جد ناتج ما يأتي :

$1)(2+3i) + (1-5i) = (2+1) + (3-5)i = 3-2i$

$2)(3-i) + (-4+6i) = (3-4) + (-1+6)i = -1+5i$

$3)(4+5i) - (2-7i) = (4+5i) + (-2+7i) = (4-2) + (5+7)i$

$= 2+12i$

$4) -2i - (3i^2 - 4i^3) = (0-2i) - (-3+4i) = (0-2i) + (3-4i)$

$= (0+3) + (-2-4)i = 3-6i$

مثال : حل المعادلة $x \in C \ , (2-4i) + x = -5+i$

الحل : باضافة النظير الجمعي للعدد $(2-4i)$ للطرفين لان جمع عدد مع نظيره يساوي صفرا

$(2-4i) + x = -5+i$

$(2-4i) + (-2+4i) + x = (-5+i) + (-2+4i)$

$0 + 0i + x = (-5-2) + (1+4)i$

$x = -7+5i$

ملاحظة : ان طرح اي عدد مركب من اخر يساوي حاصل جمع العدد المركب الاول مع النظير الجمعي للعدد المركب الاخر .

مثال : جد ناتج $(3-2i) - (8+5i)$

$(3-2i) + (-8-5i) = (3-8) + (-2-5)i = -5 + (-7)i = -5-7i$

ملاحظة : مجموعة الاعداد الحقيقية R هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد المركبة C اي ان $R \subset C$

مثال : جد ناتج $(7-13i) - (9+4i)$

الحل :

$(7-13i) - (9+4i)$

$= (7-13i) + (-9-4i) = (7-9) + (-13-4)i = -2-17i$

مثال : جد مجموع العددين في كل مما يأتي :

a) $3+4\sqrt{2}\,i \quad , \quad 5-2\sqrt{2}\,i$

$$(3+4\sqrt{2}\,i)+(5-2\sqrt{2}\,i)=(3+5)+(4\sqrt{2}\,i-2\sqrt{2}\,i)=8+2\sqrt{2}\,i$$

b) $3 \quad ,2-5i$

$$(3+0i)+(2-5i)=(3+2)+(0-5)i=5-5i$$

c) $m=1+5i \quad , \quad w=3+7i \quad , \quad z=-1-i$

$$m+w+z=(1+5i)+(3+7i)+(-1-i)=(1+3-1)+(5+7-1)i=3+11i$$

مثال : اذا كان $c=1+2i\,, w=-1-7i\,, z=-1-11i$ فأوجد ما يلي : $-2c-4w+3z$

$$-2c-4w+3z = -2(1+2i)-4(-1-7i)+3(-1-11i)$$
$$= (-2-4i)+(4+28i)+(-3-33i)$$
$$=(-2+4-3)+(-4+28-33)i=-1-9i$$

واجب : اذا كان $c=1+2i \quad , \quad w=-1-7i \quad , \quad z=-1-11i$ فأوجد ما يلي :

$(a)\ 2iw+iz+3z \qquad (b)\ -3c+2z-4i+2 \qquad (c)\ 3(z+c+w) \qquad (d)\ 2i\left(iz+3i^3\right)$

ضرب الاعداد المركبة

اذا كان $C_1=(a+bi)\ ,C_2=(c+di)\ \forall\ c\,,h\ \in\ R$ فإن

1) $h(a+bi) = ah+hbi$

2) $hi(a+bi)=hai+hbi^2=hai-hb= -hb+hai$

3) $C_1\,.\,C_2=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$

4) $(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+2abi$

5) $\forall\ c\neq 0+0i\ \ \exists\, c^{-1}=\frac{1}{c}$

ملاحظة : يوجد النظير الضربي لكل عدد مركب ما عدا الصفر لا يوجد له نظير ضربي .

مثال : جد ناتج كل مما يأتي بالصيغة الجبرية للعدد المركب :

1) $3(1-6i)=3-18i$

2) $3i(1-6i)= 3i-18i^2 = 3i+18=18+3i$

3) $(1+2i)(2+3i)=2+3i+4i+6i^2=(2-6)+(3+4)i = -4+7i$

4) $(2-3i)(4-i)=8-2i-12i+3i^2=(8-3)+(-2-12)i=5-14i$

5) $(2i^2+3i^3)(\sqrt{-4}+5) = (-2-3i)(2i+5) = (-2-3i)(5+2i)$

$= -10-4i-15i-6i^2$

$= (-10+6)-4i-15i = -4-19i$

6) $(1-2i)^2 = 1-4i+4i^2 = 1-4i-4 = -3-4i$

7) $(-2+3i)^2 = 4-12i+9i^2 = 4-12i-9 = -5-12i$

8) $(1+2i)^3 = (1+2i)(1+2i)^2 = (1+2i)(1+4i+4i^2) = (1+2i)(1+4i-4)$

$= (1+2i)(-3+4i) = -3+4i-6i+8i^2$

$= (-3-8)+(4i-6i) = -11-2i$

9) $(2-i)^4 = [(2-i)^2]^2 = (4-4i+i^2)^2 = (3-4i)^2 = 9-24i+16i^2 = -7-24i$

10) $(1-\sqrt{3}i)^2+(2-2\sqrt{3}i)^2 = (1-2\sqrt{3}i+3i^2)+(4-8\sqrt{3}i+12i^2)$

$= (1-2\sqrt{3}i-3)+(4-8\sqrt{3}i-12)$

$= (-2-2\sqrt{3}i)+(-8-8\sqrt{3}i) = -10-10\sqrt{3}i$

11) $(1+i)^2-(3-i)(1+2i) = (1+2i+i^2)-(3+6i-i-2i^2)$

$= (0+2i)-(3+2)+(6-1)i = (0+2i)-(5+5i)$

$= (0+2i)+(-5-5i) = -5-3i$

12) $(1+i)^3-(1-i)^3 = (1+i)^2(1+i)-(1-i)^2(1-i)$

$= (1+2i+i^2)(1+i)-(1-2i+i^2)(1-i) = 2i(1+i)-[-2i(1-i)]$

$= (2i+2i^2)-(-2i+2i^2) = (-2+2i)-(-2-2i) = (-2+2i)+(2+2i) = 0+4i$

13) اذا كانت $x = 2+3i$ ، فجد قيمة $x^2-3xi+\sqrt{-16}$

الحل :

$= x^2-3xi+\sqrt{-16} = (2+3i)^2-3(2+3i)i+4i$

$= (4+12i+9i^2)+(-6i-9i^2)+(0+4i)$

$= (-5+12i)+(9-6i)+(0+4i) = 4+10i$

14) $(1+i)^2+(1-i)^2 = (1+2i+i^2)+(1-2i+i^2)$

$= (1+2i-1)+(1-2i-1) = 2i-2i = 0$

واجب : جد ناتج كل مما يلي :

(1) $(2+\sqrt{-3})(1+2\sqrt{-3})$

(2) $i(1+i)-i^3(1+2i)$

(3) $(3+\sqrt{-8})(2+2\sqrt{-2})$

(4) $(\sqrt{2}+\sqrt{-2})^2$

المرافق (العامل المنسب) للعدد المركب

اذا كان $c = a + bi$ فإن $\bar{c} = a - bi$ حيث يسمى $\bar{c}$ مرافق العدد المركب c فإن $c.\bar{c} = a^2 + b^2$

$(2 - 3i)(2 + 3i) = 4 + 9 = 13$

$(4 + 5i)(4 - 5i) = 16 + 25 = 41$

$(1 + i)(1 - i) = 1 + 1 = 2$

العدد	مرافقه	نظيره الجمعي	نظيره الضربي
$a + bi$	$a - bi$	$-a - bi$	$\frac{1}{a + bi}$
$3 + 7i$	$3 - 7i$	$-3 - 7i$	$\frac{1}{3 + 7i}$
$-2 + 5i$	$-2 - 5i$	$2 - 5i$	$\frac{1}{-2 + 5i}$
-4	-4	4	$\frac{1}{-4}$
i^3	i	$-i^3$	$\frac{1}{i^3}$
$(1, -4)$	$(1, 4)$	$(-1, 4)$	$\frac{1}{(1, -4)}$

خواص مرافق العدد المركب

$\forall\, c_1, c_2, c \in C$

1) $\overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$

2) $\overline{c_1 \,.\, c_2} = \overline{c_1} \,.\, \overline{c_2}$

3) $\bar{\bar{c}} = c$

4) اذا كان $c = a + bi$ فإن $\bar{c}\,.\,c = a^2 + b^2$

5) $\bar{c} + c = 2a$

6) $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}} \quad , \quad c_2 \neq 0$

7) اذا كان $c \in \mathbf{R}$ فان $\bar{c} = c$

النظير الضربي للعدد المركب

ملاحظات :

(١) عند ظهور (i) في المقام نضرب المقام والبسط بمرافق المقام لتبسيط الحل .

(٢) يمكن استخدام التعبير (مقلوب العدد المركب) بدل (النظير الضربي) ويرمز له بالرمز $c^{-1} = \frac{1}{c}$.

مثال : جد النظير الضربي لكل مما يأتي :

1) $c = 3+4i$

الحل : $c^{-1} = \frac{1}{c} = \frac{1}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$

2) $c = (3-2i)^2 - 4i(1-2i)$

الحل : $(3-2i)^2 - 4i(1-2i) = (9-12i+4i^2) + (-4i+8i^2)$

$= (5-12i) + (-8-4i) = -3-16i$

$c^{-1} = \frac{1}{c} = \frac{1}{-3-16i} = \frac{1}{-3-16i} \cdot \frac{-3+16i}{-3+16i} = \frac{-3+16i}{9+256} = \frac{-3}{265} + \frac{16}{265}i$

مثال : جد عددين مركبين مترافقين مجموعيهما (6) وحاصل ضربهما (25)

الحل : لتكن $x = a+bi \quad , \; y = a-bi$

$(a+bi)+(a-bi) = 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$(a+bi).(a-bi) = 25 \Rightarrow a^2+b^2 = 25 \Rightarrow 9+b^2 = 25 \Rightarrow b^2 = 25-9 \Rightarrow b^2=16$

$b = \mp 4$

$\therefore$ العددان هما $(3+4i), (3-4i)$

مثال : اذا كان $(c_1 = 1+i)$ ، $(c_2 = 3-2i)$ فتحقق من الآتي :

1) $\overline{c_1+c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$

LHS $\overline{c_1+c_2} = \overline{(1+i)+(3-2i)} = \overline{(1+3)+(1-2)i} = \overline{4-i} = 4+i$

RHS $\overline{c_1} + \overline{c_2} = (1-i) + (3+2i) = (1+3) + (-1+2)i = 4+i$

LHS = RHS

2) $\overline{c_1 . c_2} = \overline{c_1} . \overline{c_2}$

LHS $\overline{c_1 . c_2} = \overline{(1+i).(3-2i)} = \overline{(3-2i)+(3i-2i^2)} = \overline{5+i} = 5-i$

RHS $\overline{c_1} . \overline{c_2} = \overline{(1+i)} . \overline{(3-2i)} = (1-i)(3+2i) = 3+2i-3i+2 = 5-i$

LHS = RHS

3) $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$

LHS $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \overline{\left(\frac{1+i}{3-2i} \times \frac{3+2i}{3+2i}\right)} = \overline{\frac{3+2i+3i+2i^2}{9+4}} = \overline{\frac{1+5i}{13}} = \frac{1-5i}{13} = \frac{1}{13} - \frac{5i}{13}$

RHS $\frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}} = \frac{\overline{1+i}}{\overline{3-2i}} = \frac{1-i}{3+2i} = \frac{1-i}{3+2i} \times \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{3-2i-3i+2i^2}{9+4} = \frac{1-5i}{13} = \frac{1}{13} - \frac{5i}{13}$

LHS = RHS

4) $\overline{\overline{c_1}} = c_1 \quad \Rightarrow \overline{\overline{c_1}} = \overline{\overline{1+i}} = \overline{1-i} = 1+i = c_1$

مثال : اذا كان $\frac{3-2i}{i}$ ، $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان فجد قيمة كل $x , y \in R$

الحل : لأن العددان مترافقان $\frac{x-yi}{1+5i} = \overline{\frac{3-2i}{i}}$

$$\frac{x-yi}{1+5i} = \frac{3+2i}{-i}$$

$$-i(x-yi) = (3+2i)(1+5i)$$

$$-ix + yi^2 = 3 + 15i + 2i + 10i^2$$

$$-xi - y = -7 + 17i$$

$-xi = 17i \Rightarrow x = -17$ باستخدام خاصية التساوي

$$-y = -7 \Rightarrow y = 7$$

واجب : اكتب العدد بالصيغة العادية $\frac{2-i}{3+4i}$

مثال : اثبت ان العددين مترافقين $2+3i \; , \; 2-3i$

الحل : جمع العددان $= 2a$

$$(2+3i) + (2-3i) = (2+2) + \big(3+(-3)\big)i = 4 + 0i = 4 = 2a$$

حاصل ضربهما $= a^2 + b^2$

$(2+3i)(2-3i) = 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13$ العددان مترافقان

مثال : $x \in C$ وكان $\overline{x}$ مرافق له ، جد العدد المركب x اذا كان $2x + \overline{x} = 5i - 4$

الحل : $\overline{x} = a - bi$ ، $x = a + bi$ نعوض في المعادلة

$$2(a+bi) + a - bi = 5i - 4 \Rightarrow 2a + 2bi + a - bi = 5i - 4$$

$$3a + bi = 5i - 4$$

$3a + bi = -4 + 5i$ باستخدام خاصية التساوي

$$3a = -4 \Rightarrow a = \frac{-4}{3} \quad , \quad b = 5$$

مثال : اذا كان $y = \frac{1-i}{i}$ ، $x = \frac{4+2i}{1+i}$ اثبت ان $x + y = 2 - 2i$

LHS : $x + y = \frac{4+2i}{1+i} + \frac{1-i}{i}$

$$= \frac{4+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} + \frac{1-i}{i} \cdot \frac{-i}{-i}$$

$$= \frac{4-4i+2i-2i^2}{1+1} + \frac{(-i-1)}{-i^2} = \frac{6-2i}{2} + \frac{(-i-1)}{1} = \frac{6}{2} - \frac{2i}{2} + (-i-1)$$

$= 3 - i + (-1-i) = 2 - 2i$: RHS

LHS = RHS

قسمة الاعداد المركبة

عند قسمة عدد مركب على عدد مركب آخر نضرب بمرافق المقام وكما يلي : $\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1}{C_2} \times \frac{\overline{C_2}}{\overline{C_2}}$

مثال : ضع كلاً مما يأتي بالصورة $a + bi$

$$a)\ \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i+i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{2i}{2} = i = 0 + i$$

$$b)\ \frac{1+2i}{-2+i} = \frac{1+2i}{-2+i} \times \frac{-2-i}{-2-i} = \frac{-2-i-4i-2i^2}{(-2)^2+(1)^2} = \frac{0-5i}{5} = \frac{-5i}{5} = -i = 0 - i$$

مثال : ضع بالصيغة العادية العدد المركب $\frac{(3-2i)^2}{1+5i}$

$$\frac{(3-2i)^2}{1+5i} = \frac{9-12i-4}{1+5i} = \frac{5-12i}{1+5i} \times \frac{1-5i}{1-5i} = \frac{5-25i-12i+60i^2}{(1)^2+(5)^2} = \frac{-55-37i}{26} = \frac{-55}{26} - \frac{37}{26}i$$

ملاحظة : يمكن تحليل $x^2 + y^2$ الى حاصل ضرب عددين مركبين كل منهما من الصورة $a + bi$

$$x^2 + y^2 = x^2 - y^2 i^2 = (x - yi)(x + yi)$$

مثال : حلل كلاً مما يأتي الى حاصل ضرب عاملين من الصورة $a + bi$ حيث a , b أعداد نسبية :

a) 10 b) 39 c) 53 d) $x^2 + 4$

الحل :

a) $10 = 9 + 1 = 9 - i^2 = (3 - i)(3 + i)$

حل آخر $10 = 1 + 9 = 1 - 9i^2 = (1 - 3i)(1 + 3i)$

b) $39 = 36 + 3 = 36 - 3i^2 = (6 - \sqrt{3}i)(6 + \sqrt{3}i)$

c) $53 = 49 + 4 = 49 - 4i^2 = (7 - 2i)(7 + 2i)$

d) $x^2 + 4 = x^2 - 4i^2 = (x - 2i)(x + 2i)$

مثال : حلل الى عاملين لعددين مركبين نسبيين :

1) $x^2 + 9 = x^2 - 9i^2 = (x - 3i)(x + 3i)$

2) $y^2 + 16x^2 = y^2 - 16x^2 i^2 = (y - 4xi)(y + 4xi)$

3) $(x - 1)^2 + 4 = (x - 1)^2 - 4i^2 = (x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i)$

4) $x^3 + \frac{1}{125} i = x^3 - \frac{1}{125} i \,.\, i^2 = x^3 - \frac{1}{125} i^3$

$$= \left(x - \frac{1}{5} i\right)\left(x^2 + \frac{1}{5}xi + \frac{1}{25}i^2\right) = (x - \frac{1}{5} i)(x^2 + \frac{1}{5}xi - \frac{1}{25})$$

5) $x^2 + 7xi - 12 = x^2 + 7xi + 12i^2 = (x + 4i)(x + 3i)$

مثال : حلل الى عاملين او اكثر لكل مما يأتي :

1) $4x^2 + 1 = 4x^2 - i^2 = (2x - i)(2x + i)$

2) $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 - i^2)$

$= (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$

3) $x^3 - i^3 = (x-i)(x^2+xi+i^2) = (x-i)(x^2+xi-1)$

4) $x^2 - 2xi + 3 = x^2 - 2xi - 3i^2 = (x-3i)(x+i)$

5) $x^2 + y^2 = x^2 - y^2(i^2) = x^2 - y^2 i^2 = (x-yi)(x+yi)$

6) $26 = 25 + 1 = 25 - i^2 = (5-i)(5+i)$

مثال : اكتب بالصيغة الجبرية بدون الضرب بالعامل المنسب :

1) $\frac{5}{1-2i} = \frac{1+4}{1-2i} = \frac{1-4i^2}{1-2i} = \frac{(1-2i)(1+2i)}{1-2i} = 1+2i$

2) $\frac{10}{1+2i} = \frac{2\times5}{1+2i} = \frac{2(1+4)}{1+2i} = \frac{2(1-4i^2)}{1+2i} = \frac{2(1-2i)(1+2i)}{1+2i} = 2(1-2i) = 2-4i$

مثال : جد $x\,,y$ التي تحقق $(x+yi)(2-i) = 8+i$

$x+yi = \frac{8+i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}$

$x+yi = \frac{16+8i+2i-1}{4+1} = \frac{16+10i-1}{5} = \frac{15+10i}{5} = \frac{15}{5} + \frac{10i}{5}$

$x+yi = 3+2i$ خاصية التساوي

$x = 3 \quad , \quad y = 2$

مثال : جد $x\,,y$ التي تحقق $x(x+i) + y(y-i) = 13-i$

الحل : نفتح الاقواس

$x^2 + xi + y^2 - yi = 13 - i$

$(x^2+y^2) + (x-y)i = 13 - i$ خاصية التساوي

$x^2 + y^2 = 13 \quad \dots\dots\dots(1)$

$x - y = -1 \quad \dots\dots\dots(2)$

$\Rightarrow [-y = -1 - x].(-1)$

$\Rightarrow \quad y = x + 1 \dots\dots\dots(*)$ نعوض معادلة (*) في معادلة (١)

$x^2 + (x+1)^2 = 13$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 13 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 - 13 = 0$

$2x^2 + 2x - 12 = 0 \quad] \quad \div 2$

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0$

أما $x = -3$, أو $x = 2$

$y = x + 1 \Rightarrow y = -3 + 1 \Rightarrow y = -2$ عندما $x = -3$

$y = x + 1 \Rightarrow y = 2 + 1 \Rightarrow y = 3$ عندما $x = 2$

مثال : جد y , x التي تحقق المعادلة $(2 + xi)(-x + i) = \frac{9y^2+49}{3y+7i}$

$$\underbrace{-2x} + 2i - x^2 i + \underbrace{xi^2}_{-x} = \frac{(9y^2-49i^2)}{3y+7i}$$

$$\underbrace{-3x} + (2 - x^2)\, i = \frac{(3y-7i)(3y+7i)}{3y+7i}$$

$$-3x + (2 - x^2)i = 3y - 7i$$

$-3x = 3y \Rightarrow -x = y$ خاصية التساوي

$$2 - x^2 = -7 \Rightarrow 2 + 7 = x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \mp 3$$

$-(-3) = y \Rightarrow y = 3$ عندما $x = -3$

$-(3) = y \Rightarrow y = -3$ عندما $x = 3$ $y = \mp 3$

واجب : اكتب بالصيغة العادية للعدد المركب $\frac{(1-i)^9}{(1+i)^8}$

حل تمارين (1 – 1)

س1 / ضع كلاً مما يأتي بالصيغة العادية للعدد المركب :

i^5 , i^6 , i^{124} , i^{999} , i^{4n+1} , $\forall n \in N$, $(2 + 3i)^2 + (12 + 2i)$

$(10 + 3i)(0 + 6i)$, $(1 + i)^4 - (1 - i)^4$, $\frac{12+i}{i}$, $\frac{3+4i}{3-4i}$, $\frac{i}{2+3i}$, $\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3$, $\frac{2+3i}{1-i} \times \frac{1+4i}{4+i}$, $(1 + i)^3 + (1 - i)^3$

$$i^5 = i^4 . i = (1) . i = i = 0 + i$$

$$i^6 = i^4 . i^2 = (1).(-1) = -1 = -1 + 0i$$

$$i^{124} = (i^4)^{31} = (1)^{31} = 1 = 1 + 0i$$

$$i^{999} = (i^4)^{249}\, i^3 = (1) . i^2 . i = -i = 0 - i$$

$$i^{4n+1} = i^{4n} . i = (i^4)^n . i = (1). i = i = 0 + i$$

- $(2 + 3i)^2 + (12 + 2i) = 4 + 12i + 9i^2 + (12 + 2i) = (-5 + 12i) + (12 + 2i)$

  $= 7 + 14i$
- $(10 + 3i)(0 + 6i) = 0 + 60i + 0 + 18i^2 = -18 + 60i$
- $(1 + i)^4 - (1 - i)^4 = [(1 + i)^2]^2 - [(1 - i)^2]^2$

$= [1 + 2i + i^2]^2 - [1 - 2i + i^2]^2 = (2i)^2 - (-2i)^2 = 4i^2 - 4i^2 = 0 = 0 + 0i$

- $\frac{12+i}{i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{-12i-i^2}{-i^2} = \frac{1-12i}{1} = 1 - 12i$
- $\frac{3+4i}{3-4i} = \frac{3+4i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{9+12i+12i+16i^2}{3^2+4^2} = \frac{-7+24i}{9+16} = \frac{-7+24i}{25} = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i$
- $\frac{i}{2+3i} = \frac{i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2i-3i^2}{2^2+3^2} = \frac{3+2i}{4+9} = \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$
- $(\frac{3+i}{1+i})^3 = (\frac{3+i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i})^3$

ملاحظة : عدد مركب بصورة كسرية مرفوع لقوة يضرب داخل القوس في المرافق اولا ثم يبسط وبعدها نتخلص من القوة المرفوع لها .

$= (\frac{3-3i+i-i^2}{1^2+1^2})^3 = (\frac{4-2i}{2})^3 = (2 - i)^3 = (2 - i)^2(2 - i)$

$= (4 - 4i + i^2)(2 - i) = (3 - 4i)(2 - i) = 6 - 3i - 8i + 4i^2$

$= 2 - 11i$

- $\frac{2+3i}{1-i} \times \frac{1+4i}{4+i} = \frac{2+8i+3i+12i^2}{4+i-4i-i^2} = \frac{-10+11i}{5-3i} \times \frac{5+3i}{5+3i} = \frac{-50-30i+55i+33i^2}{5^2+3^2}$

$= \frac{-83 + 25i}{25 + 9} = \frac{-83 + 25i}{34} = \frac{-83}{34} + \frac{25}{34}i$

- $(1 + i)^3 + (1 - i)^3$

$= (1 + i)^2(1 + i) + (1 - i)^2(1 - i)$

$= (1 + 2i + i^2)(1 + i) + (1 - 2i + i^2)(1 - i) = (2i)(1 + i) + (-2i)(1 - i)$

$= 2i + 2i^2 - 2i + 2i^2 = -4 = -4 + 0i$

س2 / جد قيمة كل من x , y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة الاتية :

a) $y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$

$y + 5i = 2x^2 + 4xi + xi + 2i^2 \Rightarrow y + 5i = (2x^2 - 2) + (4x + x)i$

$y + 5i = (2x^2 - 2) + 5xi$

$y = (2x^2 - 2) \; \dots\dots (1)$

$5 = 5x \quad \dots\dots (2) \Rightarrow \frac{5}{5} = \frac{5x}{5} \Rightarrow x = 1$ نعوض في معادلة (١)

$y = 2(1)^2 - 2 = 2 - 2 = 0 \Rightarrow y = 0$

b) $8i = (x + 2i)(y + 2i) + 1$

$8i = xy + 2xi + 2yi + 4i^2 + 1$

$8i = (xy - 3) + (2x + 2y)i$

$xy - 3 = 0 \Rightarrow xy = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{x} \dots\dots (1)$

$2x + 2y = 8 \,] \div 2 \Rightarrow x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x \dots\dots (2)$ نعوض (١) في (٢)

$4 - x = \frac{3}{x} \xRightarrow{\text{نضرب في } x} x(4 - x) = 3$

$$4x - x^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-3)(x-1) = 0$$
$either\ \ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ نعوض في معادلة (٢) $\Rightarrow y = 1$

$or\ \ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ نعوض في معادلة (٢) $\Rightarrow y = 3$

c) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + (x+yi) = (1+2i)^2$

$$(x+yi) = (1+2i)^2 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right) \Rightarrow (x+yi) = (1+4i+4i^2) - \left(\frac{1-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right)$$
$$(x+yi) = -3 + 4i - \left(\frac{1 - i - i + i^2}{1^2 + 1^2}\right)$$
$$(x+yi) = -3 + 4i - \left(\frac{-2i}{2}\right) \Rightarrow (x+yi) = -3 + 4i + i$$
$$x + yi = -3 + 5i \Rightarrow x = -3 \ ,\ y = 5$$

d) $\frac{2-i}{1+i}x + \frac{3-i}{2+i}y = \frac{1}{i}$

$$\left[\frac{2-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right]x + \left[\frac{3-i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i}\right]y = \frac{i^4}{i}$$
$$\left[\frac{2 - 2i - i + i^2}{1^2 + 1^2}\right]x + \left[\frac{6 - 3i - 2i + i^2}{2^2 + 1^2}\right]y = i^3$$
$$\left[\frac{1-3i}{2}\right]x + \left[\frac{5-5i}{5}\right]y = -i\ ] \times 10 \Rightarrow 5(1-3i)x + 2(5-5i)y = -10i$$
$$5x - 15xi + 10y - 10yi = 0 - 10i$$
$$5x + 10y = 0 \quad \ldots\ldots(1)$$
$$\underline{-15x - 10y = -10 \quad \ldots\ldots(2)}$$ بالجمع

$-10x = -10 \Rightarrow x = 1$ نعوض في معادلة (١)

$$5(1) + 10y = 0 \Rightarrow 10y = -5 \Rightarrow y = \frac{-5}{10} \Rightarrow y = \frac{-1}{2}$$

س3 / اثبت ان :

a) $\frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{8}{25}i$

$$\text{LHS}\ \frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{1}{4 - 4i + i^2} - \frac{1}{4 + 4i + i^2}$$
$$= \frac{1}{4 - 4i - 1} - \frac{1}{4 + 4i - 1} = \frac{1}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i} - \frac{1}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i}$$
$$= \frac{3+4i}{9+16} - \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3+4i}{25} - \frac{3-4i}{25} = \frac{3 + 4i - 3 + 4i}{25} = \frac{8}{25}i \quad \text{RHS}$$

b) $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$ وزاري ٢٠١٢ / د٣

$$\text{LHS}\ \frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{1 - 2i + i^2}{1+i} + \frac{1 + 2i + i^2}{1-i} = \frac{-2i}{1+i} + \frac{2i}{1-i}$$

$$= \frac{-2i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} + \frac{2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{-2i+2i^2}{1^2+1^2} + \frac{2i+2i^2}{1^2+1^2}$$

$$= \frac{-2i-2}{2} + \frac{2i-2}{2} = \frac{-2i}{2} - \frac{2}{2} + \frac{2i}{2} - \frac{2}{2} = -i-1+i-1 = -2 \quad \text{RHS}$$

c) $(1-i)(1-i^2)(1-i^3) = 4$

LHS $(1-i)(1-i^2)(1-i^3) = (1-i)(1+1)(1-(-i)) = (1-i)(2)(1+i)$

$(1-i)(2+2i) = 2+2i-2i-2i^2 = 2+2 = 4 \quad \text{RHS}$

س4 / حلل كلا من الاعداد 85 و 41 و 125 و 29 الى حاصل ضرب عاملين من الصورة $a+bi$ حيث a , b عددان نسبيان .

$85 = 81 + 4 = 81 - 4i^2 = (9-2i)(9+2i)$

$41 = 25 + 16 = 25 - 16i^2 = (5-4i)(5+4i)$

$125 = 121 + 4 = 121 - 4i^2 = (11-2i)(11+2i)$

$29 = 25 + 4 = 25 - 4i^2 = (5-2i)(5+2i)$

س5 / جد قيمة x , y الحقيقيتين اذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

$\frac{6}{x+yi} = \overline{\frac{3+i}{2-i}}$

$$\frac{6}{x+yi} = \frac{3-i}{2+i} \Longrightarrow (x+yi)(3-i) = 12+6i \Longrightarrow x+yi = \frac{12+6i}{3-i}$$

$$x+yi = \frac{12+6i}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i} = \frac{36+12i+18i+6i^2}{3^2+1^2} = \frac{36-6+30i}{9+1}$$

$$x+yi = \frac{30+30i}{10} \Longrightarrow x+yi = 3+3i$$

$\boxed{x=3}$, $\boxed{y=3}$

أمثلة أضافية محلولة

مثال : أكتب بالصيغة العادية أو الجبرية كل مما يأتي :

1) $(5+3i)(1+i) + (2-i)^2$

$(5+5i+3i+3i^2) + 4 - 4i + i^2 = (2+8i) + (3-4i) = 5+4i$

2) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}\right)^9 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^9 = \left(\frac{\sqrt{3}-3i-i+\sqrt{3}i^2}{1^2+(\sqrt{3})^2}\right)^9 = \left(\frac{\sqrt{3}-4i-\sqrt{3}}{1+3}\right)^9$

$$= \left(\frac{-4i}{4}\right)^9 = (-i)^9 = (-i)(-i)^8 = -i = 0 - i$$

3) $\left(1-\sqrt{-3}\right)^2+\left(2-\sqrt{-3}\right)^2$

$$\left(1-\sqrt{3}i\right)^2+\left(2-\sqrt{3}i\right)^2=\left(1-2\sqrt{3}i+3i^2\right)+\left(4-4\sqrt{3}i+3i^2\right)$$

$$=\left(-2-2\sqrt{3}i\right)+\left(1-4\sqrt{3}i\right)=-1-6\sqrt{3}i$$

مثال : جد عددين مركبين مترافقين مجموعهما 6 وحاصل ضربهما 10

الحل : نفرض أن العدد هو $c_1=a+bi$ عدد مركب مرافقه هو $c_2=a-bi$

$$\because\ c_1+c_2=2a\ \Rightarrow 6=2a\ \Rightarrow a=3$$

$$\because\ c_1.c_2=a^2+b^2\Rightarrow 10=3^2+b^2\Rightarrow b^2=1\ \Rightarrow b=\pm1$$

$\therefore$ العددان هما $(3+i)\ ,\ (3-i)$

مثال : أكتب العدد $(3+2i)(-2+i)$ بالصيغة العادية ثم جد النظير الضربي له بالصيغة الديكارتية

الحل :

الصيغة الجبرية $(3+2i)(-2+i)=(-6+3i-4i+2i^2)=\ -8-i$

الصيغة الديكارتية $\frac{1}{-8-i}=\frac{1}{-8-i}\times\frac{-8+i}{-8+i}=\frac{-8+i}{(-8)^2+1^2}=\frac{-8}{65}+\frac{i}{65}=\left(\frac{-8}{65},\frac{1}{65}\right)$

مثال : اذا كان $x=-1+2i$ فأوجد قيمة المعادلة x^2+2x+5

الحل :

$$x^2+2x+5=(-1+2i)^2+2(-1+2i)+5$$

$$=\left(1-4i+4i^2\right)+(-2+4i)+5=(-3-4i)+(-2+4i)+5=-5+0i+5$$

$$=0+0i$$

مثال : اذا كان $x\in\mathbb{C}$ و $\overline{x}$ مرافق له جد العدد المركب الذي يحقق $3x+\overline{x}=2i+3$

الحل : $\overline{x}=a-bi\ \ \therefore\ \ x=a+bi$

$$3(a+bi)+(a-bi)=2i+3\Longrightarrow 3a+3bi+a-bi=2i+3$$

$$3a+a=3\ \Rightarrow 4a=3\ \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

$$3b-b=2\Rightarrow 2b=2\ \Rightarrow b=1$$

$$\therefore\ \ x=a+bi=\frac{3}{4}+i$$

مثال : اذا كان $K=\frac{13-i}{4+i}\ \ ,\ L=\frac{7-i}{2-i}$ أثبت أن $L\ ,K$ مترافقان L^2K+LK^2

الحل : نثبت أن ناتج عملية الجمع والضرب ينتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقة R

$$K=\frac{13-i}{4+i}=\frac{13-i}{4+i}\times\frac{4-i}{4-i}=\frac{52-13i-4i+i^2}{4^2+1^2}=\frac{51-17i}{16+1}$$

$$=\frac{51}{17}-\frac{17i}{17}=3-i$$

$$L=\frac{7-i}{2-i}=\frac{7-i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}=\frac{14+7i-2i-i^2}{2^2+1^2}=\frac{15+5i}{5}=3+i$$

$(3+i)+(3-i) = 6 \in R$

$(3+i)(3-i) = 3^2+1^2 = 9+1 = 10 \in R$

$L^2K + LK^2 = LK(L+K) = (10)(6) = 60 \qquad \therefore\ L , K$ مترافقان

مثال : أكتب بالصيغة العادية أو الجبرية بدون الضرب بالعامل المنسب (المرافق)

a) $\frac{5}{2-i} = \frac{4+1}{2-i} = \frac{4-i^2}{2-i} = \frac{(2-i)(2+i)}{2-i} = 2+i$

b) $\frac{13}{2+3i} = \frac{4+9}{2+3i} = \frac{4-9i^2}{2+3i} = \frac{(2+3i)(2-3i)}{2+3i} = 2-3i$

c) $\frac{10}{2+i} = \frac{2(5)}{2+i} = \frac{2(4+1)}{2+i} = \frac{2(4-i^2)}{2+i} = \frac{2(2+i)(2-i)}{2+i} = 2(2-i) = 4-2i$

مثال : أوجد قيمة x , y الحقيقيتين والتي تحقق المعادلة في ما يأتي :

$(x+yi)(a+bi) = 1$

$$(x+yi) = \frac{1}{a+bi} \Rightarrow (x+yi) = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi} \Rightarrow (x+yi) = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

$$(x+yi) = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$$

$$x = \frac{a}{a^2+b^2} \quad , \quad y = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

واجبات

س / أوجد قيمة x , y الحقيقيتين والتي تحقق المعادلة فيما يأتي :

1) $(x+yi)^2(1+i)^2 = 1$

2) $(x+yi)^{-1} = \frac{(1+i)^3}{(1-i)^3}$

3) $\frac{1}{1+i} = \frac{(x+yi)^2}{(1+i)^3}$

4) $x+yi = (5+2i)^{-2}$

س / ضع كلاً مما يأتي بالصيغة العادية للعدد المركب :

a) $(3+4i)^{-1}$ b) $(1+2i)^{-2}$

الجذور التربيعية للعدد المركب

اذا كان $x^2 = a$ فإن $x = \pm\sqrt{a}$ وهي الجذور التربيعية للعدد (a) أما اذا كانت $x^2 = 4$ فإن $x = 2$ هو أحد جذري المعادلة ولإيجاد الجذور التربيعية للعدد المركب لاحظ الأمثلة التالية:

مثال : جد الجذور التربيعية للعدد المركب $c = 8+6i$

$8+6i = (a+bi)^2 \Rightarrow a^2+2abi-b^2 = 8+6i$

$a^2 - b^2 + 2abi = 8 + 6i$

$a^2 - b^2 = 8 \; \ldots\ldots (1)$

$2ab = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)] \div 2$

$ab = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{a} \ldots\ldots (*)$ نعوض معادلة $(*)$ في (١)

$a^2 - \frac{9}{a^2} = 8 \;\;] \times a^2 \Rightarrow a^4 - 9 = 8a^2 \Rightarrow a^4 - 8a^2 - 9 = 0$

$(a^2 - 9)(a^2 + 1) = 0$

$either \quad a^2 - 9 \Rightarrow a = \pm 3$

$b = \frac{3}{a} = \frac{3}{\pm 3} \Rightarrow b = \pm 1$

$or \;\; a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = -1$ تهمل

$\therefore$ الجذران هما $3 + i \;, -3 - i$

ملاحظة : نلاحظ أن $a\,,b$ تأخذ قيم حقيقية فقط فلذلك $a^2 = -1$ وهي قيمة تخيلية تهمل .

مثال : جد الجذور التربيعية للعدد $-i$

$-i = (a + bi)^2$

$0 - i = a^2 + 2abi - b^2 \Rightarrow 0 - i = a^2 - b^2 + 2abi \Rightarrow$

$a^2 - b^2 = 0 \; \ldots\ldots (1)$

$2ab = -1 \; \ldots\ldots\ldots (2)$

$b = \frac{-1}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots (*)$ نعوض معادلة $(*)$ في (١)

$a^2 - \frac{1}{4a^2} = 0 \,] \times 4a^2$

$4a^4 - 1 = 0 \Rightarrow (2a^2 - 1)(2a^2 + 1) = 0$

$either \;\; 2a^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$b = \frac{-1}{2\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}}$

$or \; 2a^2 + 1 = 0 \Rightarrow 2a^2 = -1 \Rightarrow a^2 = \frac{-1}{2}$ تهمل

الجذران هما $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \;\;,\;\; \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

مثال : جد الجذر التربيعي للعدد المركب $-1+\sqrt{3}i$

$$-1+\sqrt{3}i=(x+yi)^2$$

$$-1+\sqrt{3}i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2=-1 \ldots\ldots(1) \qquad , \qquad 2xy=\sqrt{3} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2x} \ldots\ldots(2)$$

$$x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)^2=-1$$

$$x^2-\frac{3}{4x^2}=-1 \xrightarrow{\text{نضرب } 4x^2\times} 4x^4-3=-4x^2 \Rightarrow 4x^4+4x^2-3=0$$

$$(2x^2+3)(2x^2-1)=0$$

$either\ \ 2x^2+3=0 \Rightarrow 2x^2=-3$ تهمل حيث $x\in R$

$$or \qquad 2x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$y=\frac{\sqrt{3}}{\pm\frac{2}{\sqrt{2}}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

∴ الجذران التربيعيان $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i \quad , \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$

مثال : جد الجذر التربيعي للعدد $8i$

$$8i=(a+bi)^2$$

$$0+8i=a^2+2abi-b^2 \Rightarrow 0+8i=a^2-b^2+2abi$$

$$a^2-b^2=0 \ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$2ab=8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$b=\frac{8}{2a} \Rightarrow b=\frac{4}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$ نعوض معادلة $(*)$ في (١)

$$a^2-\frac{16}{a^2}=0\ ]\times a^2 \Rightarrow a^4-16=0 \Rightarrow (a^2+4)(a^2-4)=0$$

$either\ \ a^2+4=0 \Rightarrow a^2=-4$ تهمل

$$or \qquad a^2-4=0 \Rightarrow a=\pm 2$$

$$b=\frac{4}{\pm 2}=\pm 2$$

∴ الجذران هما $-2-2i \quad , \quad 2+2i$

مثال : جد الجذر التربيعي للعدد -25

$$c^2=-25 \Rightarrow c=\pm\sqrt{-25}=\pm\sqrt{25\,(-1)}=\pm\sqrt{25i^2}=\pm 5i$$

حل المعادلات التربيعية في $\mathbb{C}$

كل معادلة تربيعية لا يمكن حلها بطريقة التجربة فهي تحل بطريقة الدستور فمثلاً

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حيث $a \neq 0$ و $a , b , c \in R$ فإن $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ونلاحظ أنه اذا كان مقدار المميز $(b^2 - 4ac)$ سالبا فإن مجموعة الحلول الخاصة بالمعادلة تنتمي الى مجموعة الاعداد المركبة ويوجد نوعان من حل المعادلات التربيعية .

النوع الأول : المميز لا يحتوي على (i)

مثال : حل المعادلة التربيعية $x^2 + 4x + 5 = 0$ في مجموعة الاعداد المركبة

الحل : حسب قانون الدستور فأن $a = 1 \quad , \quad b = 4 \quad , \quad c = 5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4\,(-1)}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4\,i^2}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} \Rightarrow x = -2 \pm i$$

∴ مجموعة الحل $\{-2 - i \,, -2 + i\}$

ملاحظة : من قانون الدستور نعلم أن جذري المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ التي معاملاتها الحقيقية هي :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} \Rightarrow \boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$$ مجموع الجذرين

$$x_1 . x_2 = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$ حاصل ضرب الجذرين

ويمكن الاستفادة من الخاصية أعلاه في ايجاد الجذور التربيعية وكما يلي :

x^2 − (مجموع الجذرين) x + (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

مثال : جد المعادلة التربيعية التي جذرها $\pm(2 + 2i)$

الحل : نتبع صيغة المعادلة اعلاه في التطبيق

مجموع الجذرين $(2 + 2i) + (-2 - 2i) = (2 - 2) + (2 - 2)i = 0 + 0i$

ضرب الجذرين $(2 + 2i)(-2 - 2i) = -4 - 4i - 4i - 4i^2 = -4 - 8i + 4 = -8i$

x^2 − (مجموع الجذرين) x + (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

$$x^2 - (0)x + (-8i) = 0 \Rightarrow x^2 - 8i = 0$$

ملاحظة : عندما يعطى في السؤال كون المعادلة التربيعية التي (معاملاتها حقيقية) وأحد جذريها مثلا $a - bi$ فسيكون الجذر الثاني مرافق الجذر الاول $a + bi$

مثال : كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $3 - 4i$

الحل : بما ان معاملات المعادلة حقيقية وأحد الجذرين $3 - 4i$ فإن الجذر الاخر هو المرافق ويساوي $3 + 4i$

مجموع الجذرين $(3 - 4i) + (3 + 4i) = (3 + 3) + (-4 + 4)i = 6$

ضرب الجذرين $(3 + 4i)(3 - 4i) = 9 - 12i + 12i - 16i^2 = 9 + 16 = 25$

طريقة اخرى في الحل :

- في مثل هذه الاسئلة نعتمد على قواعد المرافق للعدد المركب وكما يأتي :

$$C . \overline{C} = a^2 + b^2 \quad , \quad C + \overline{C} = 2a$$

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ (حاصل ضرب الجذرين) $= 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 25 = 0$

مثال : جد مجموعة الحل للمعادلة $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$

ملاحظة : لا يحل السؤال لتالي $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ بالتجربة اذا اصبح بهذه الصورة $x^4 + 10x^2 - 9i^2 = 0$ لان الحد الوسط لا يحتوي على (i) ، لذلك نقوم بحله مباشرة بطريقة التجربة. والناتج من عملية التجربة نستخدم معه الطريقة السابقة وهي اضافة i^2 لغرض تحليل الاقواس الناتجة من التجربة .

الحل :

$$x^4 + 10x^2 + 9 = 0$$
$$(x^2 + 9)(x^2 + 1) = 0$$
$$(x^2 - 9i^2)(x^2 - i^2) = 0$$
$$(x + 3i)(x - 3i)(x + i)(x - i) = 0$$

أما $x + 3i = 0 \Rightarrow x = -3i$

او $x - 3i = 0 \Rightarrow x = 3i$

$x + i = 0 \Rightarrow x = -i$

$x - i = 0 \Rightarrow x = i$

مجموعة الحل $= \{3i , -3i , i , -i\}$

مثال : جد مجموعة الحل للمعادلة $x^2 - 6x + 13 = 0$

الحل : في مثل هذه الانواع من المعادلات التي لا تتحلل باي نوع من التحاليل لذا نستخدم (طريقة الدستور)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث $a = 1 , \ b = -6 , \ c = 13$ تعوض في القانون الدستور

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - (4)(1)(13)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \Rightarrow x = \frac{6}{2} \pm \frac{4i}{2} \Rightarrow x = 3 \pm 2i$$

مجموعة الحل للمعادلة في C جذران مترافقان $\{3 + 2i , 3 - 2i\}$

مثال : جد مجموعة حل المعادلة $x^2 + 4x + 5 = 0$

الحل :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث $a = 1 , b = 4 , c = 5$ تعوض في القانون الدستور

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - (4)(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

$x = -2 - i \quad , \quad x = -2 + i \quad ,$ مجموعة الحل $= \{-2 - i , -2 + i\}$

مثال : جد مجموعة حل المعادلة $x^3 - 8i = 0$

الحل : $\because -i = i^3$

$$x^3 + 8i^3 = 0$$

$$(x + 2i)(x^2 - 2ix - 4) = 0$$

$$either\ (x + 2i) = 0 \Rightarrow x = -2i$$

$$or\ (x^2 - 2ix - 4) = 0 \Rightarrow a = 1 \ , \ b = -2i \ , \ c = -4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{2i \pm \sqrt{-4 - (4)(-4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2i \pm \sqrt{-4 + 16}}{2} \Rightarrow x = \frac{2i \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$x = \frac{2i \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2i}{2} \pm \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$either\ x = i + \sqrt{3} \quad or \quad x = i - \sqrt{3}$$

مجموعة الحل $= \{\sqrt{3} + i , -\sqrt{3} + i , -2i\}$

ملاحظة : اذا علمت من المعادلة جذراها اي (جد المعادلة التربيعية اذا علم جذراها) هذه الحالة هي عكس الامثلة السابقة يعني الجذور معطاة والمطلوب حل المعادلة .

مثال : جد المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذريها النظير الضربي للعدد المركب $\frac{10-5i}{2+i}$

الحل : نستخرج النظير الضربي للعدد $\frac{10-5i}{2+i}$ وهو $\frac{2+i}{10-5i}$

ويستخدم في الحل الضرب بالمرافق للمقام $\frac{2+i}{10-5i} \times \frac{10+5i}{10+5i}$

$$=\frac{20+10i+10i+5i^2}{(10)^2+(10)^2}$$

$$=\frac{(20-5)+(10+10)i}{100+25}$$

$$=\frac{15+20i}{125}=\frac{15}{125}+\frac{20}{125}i$$

الجذر الاول $(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i)$ ، الجذر الثاني (المرافق) $(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i)$

جمع الجذرين $\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i+\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i=\frac{6}{25}$

ضرب الجذرين $\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)\left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)=(\frac{3}{25})^2+(\frac{4}{25})^2=\frac{9}{625}+\frac{16}{625}=\frac{25}{625}=\frac{1}{25}$

$$x^2-\frac{6}{25}x+\frac{1}{25}=0 \Rightarrow 25x^2-6x+1=0$$

ملاحظة : سنضرب الكسر في المرافق لنتخلص من المقام وبعدها يكون لدينا عدد مركب نفتح التربيع ويبسط ونجعله عدد مركب واحد . فمثلا اذا كان لدينا الكسر الاتي $(\frac{2+5i}{3+2i})^2$

مثال : $2x^2+ax+b=0$ هي المعادلة التربيعية التي أحد جذريها $3+i$ جد قيمة a ، b التي تنتمي الى R .

الحل : لم يذكر معاملات حقيقية هنا وعوض عنها بأنها تنتمي الى R لذلك احد جذريها $3+i$ اذن يكون الجذر الاخر $3-i$ اي (المرافق) .

$$x^2-ax+b=0$$

$x^2 -$ جمع الجذرين $x +$ ضرب الجذرين $= 0$

جمع الجذرين $3+i+3-i=6$

ضرب الجذرين $(3+i)(3-i)=9+1=10$

المعادلة الاصلية فيها 2 وهو معامل x^2 لذلك نضرب كل من مجموع الجذرين وحاصل ضربهما في 2 لان المعادلة الأصلية هي : $2x^2+ax+b=0$

$2 \times 6 = 12$

$2 \times 10 = 20$

$2x^2 - 12x + 20 = 0 \qquad a = -12 \quad , \quad b = 20$

النوع الثاني : المميز يحتوي على (i)

مثال : جد مجموعة حل المعادلة $z^2 - 3z + 3 + i = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = -3 \quad , \quad c = (3 + i)$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(1)(3 + i)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12 - 4i}}{2}$$

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{-3 - 4i}}{2} \dots\dots (1)$$

$[\sqrt{-3 - 4i} = a + bi\ ]$ بتربيع الطرفين

$-3 - 4i = (a + bi)^2$

$-3 - 4i = (a^2 - b^2) + 2abi$

$a^2 - b^2 = -3 \quad \dots\dots (2)$

$2ab = -4 \Longrightarrow b = \frac{-4}{2a} \Longrightarrow b = \frac{-2}{a} \quad \dots\dots (3)$ نعوض في معادلة (٢)

$a^2 - \frac{4}{a^2} = -3 \quad] \times a^2$

$a^4 - 4 = -3a^2 \Longrightarrow a^4 + 3a^2 - 4 = 0$

$(a^2 + 4)(a^2 - 1) = 0$

$either \quad a^2 + 4 = 0 \Longrightarrow a^2 = -4$ تهمل

$or \quad a^2 - 1 = 0 \Longrightarrow a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1$ نعوض في معادلة (٣)

$b = \frac{-2}{1} = -2 \qquad a = 1$ عندما

$b = \frac{-2}{-1} = 2 \qquad a = -1$ عندما

$1 - 2i \quad , \quad -1 + 2i$

$$either\ z = \frac{3 + 1 - 2i}{2} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$$

$$or \quad z = \frac{3 - 1 + 2i}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

مجموعة الحل= $\{2 - i , 1 + i\}$ والجذران غير مترافقان

حل تمارين (2 – 1)

س1 / حل المعادلات التربيعية الاتية وبين اي منهما يكون جذراها مترافقان :

$a)\ z^2 = -12$

$$z^2 = 12i^2 \Rightarrow z = \sqrt{12i^2} \Rightarrow z = \pm 2\sqrt{3}i$$ جذران مترافقان

$c)\ 2z^2 - 5z + 13 = 0$

$$a = 2 \quad , \quad b = -5 \quad , \quad c = 13$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 13}}{2 \times 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 104}}{4}$$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{-79}}{4} \Rightarrow$ أما $x = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{79}\,i}{4}$ أو $x = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{79}\,i}{4}$ جذران مترافقان

$d)\ z^2 + 2z + i(2 - i) = 0$

$$\boxed{a = 1 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad c = i(2 - i) = 2i - i^2 = 2i + 1}$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(2i + 1)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8i - 4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8i}}{2}$$

$z = \frac{-2 \pm \sqrt{0 - 8i}}{2}$ ...... (1) نجد قيمة الجذر

$[\sqrt{0 - 8i} = a + bi]$ بتربيع الطرفين $\Rightarrow (a + bi)^2 = 0 - 8i$

$$(a^2 - b^2) + 2abi = 0 - 8i$$

$$a^2 - b^2 = 0 \quad ......(2)$$

$$-8 = 2ab \Rightarrow a = \frac{-8}{2b} \Rightarrow a = \frac{-4}{b} \quad ......(3)$$

$$\left(\frac{-4}{b}\right)^2 - b^2 = 0 \Rightarrow \left[\frac{16}{b^2} - b^2 = 0\right] \times -b^2$$

$$b^4 - 16 = 0 \Rightarrow (b^2 + 4)(b^2 - 4) = 0$$

$either \quad b^2 + 4 = 0 \Rightarrow b^2 = -4$ تهمل

$or \quad b^2 - 4 = 0 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow \boxed{b = \pm 2}$ نعوض في معادلة (٣)

$a = \frac{-4}{2} = -2 \quad b = 2$ عندما

$a = \frac{-4}{-2} = 2 \quad b = -2$ عندما

$$-2 + 2i \quad , \quad 2 - 2i$$

$either\ z = \frac{-2+2-2i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$

$or\quad z = \frac{-2-2+2i}{2} = \frac{-4+2i}{2} = \frac{-4}{2} + \frac{2i}{2} = -2+i$

الجذران غير مترافقان $\{-i\ , -2+i\}$

e) $4z^2 + 25 = 0$

$$4z^2 = -25 \Rightarrow z^2 = \frac{-25}{4} \Rightarrow z^2 = \frac{25i^2}{4} \Rightarrow z = \sqrt{\frac{25i^2}{4}}$$

$z = \pm\frac{5i}{2}$ ∴ مجموعة الحل $= \left\{-\frac{5i}{2}\ , \frac{5i}{2}\right\}$ والجذران مترافقان

f) $z^2 - 2zi + 3 = 0$

ط١ :

$$z^2 - 2zi + 3 = 0 \Rightarrow z^2 - 2zi - 3i^2 = 0 \Rightarrow (z-3i)(z+i) = 0$$

$$either\ z - 3i = 0 \Rightarrow \boxed{z = 3i}\quad or\ z + i = 0 \Rightarrow \boxed{z = -i}$$

∴ مجموعة الحل $\{-i\ , 3i\}$ والجذران غير مترافقان

ط٢ :

$$z^2 - 2zi + 3 = 0$$

$$\boxed{a = 1\ ,\ b = -2i\ ,\ c = 3}$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{-(-2i) \pm \sqrt{-4 - (4)(1)(3)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2i \pm 4i}{2} = i \pm 2i$$

$$z = i + 2i = 3i\quad ,\quad z = i - 2i = -i$$

∴ مجموعة الحل $\{-i\ , 3i\}$ والجذران غير مترافقان

س2 / كون المعادلة التربيعية التي جذراها $M\ , L$ حيث :

a) $M = 1 + 2i$ $\qquad L = 1 - i$

مجموع الجذرين $(1+2i) + (1-i) = (1+1) + (2-1)i = 2 + i$

ضرب الجذرين $(1+2i)(1-i) = 1 - i + 2i - 2i^2 = 3 + i$

∵ $x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

∴ $x^2 - (2+i)x + (3+i) = 0$ المعادلة التربيعية

b) $M = \frac{3-i}{1+i}$ $\qquad L = (3-2i)^2$

$$M = \frac{3-i}{1+i} = \frac{3-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i-i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{2-4i}{2} \Rightarrow M = 1 - 2i$$

$$L = (3-2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 5 - 12i \Rightarrow L = 5 - 12i$$

مجموع الجذرين $(1-2i) + (5-12i) = (1+5) + (-2-12)i = 6 - 14i$

حاصل ضرب الجذرين $(1-2i)(5-12i) = 5 - 12i - 10i + 24i^2 = -19 - 22i$

$\because\ x^2 - \left(\text{مجموع الجذرين}\right)x + \left(\text{حاصل ضرب الجذرين}\right) = 0$

$\therefore\ x^2 - (6 - 14i\ )x + (-19 - 22i) = 0$ المعادلة التربيعية

س3 / جد الجذور التربيعية للاعداد المركبة الاتية :

a) $-6i$

$a + bi = \sqrt{-6i}$ بتربيع الطرفين $\Rightarrow\ (a + bi)^2 = -6i$

$a^2 + 2abi + b^2i^2 = -6i\ \Rightarrow\ (a^2 - b^2) + (2ab)i = 0 - 6i$

$a^2 - b^2 = 0 \ldots\ldots (1)$

$2ab = -6\ \Rightarrow\ b = \frac{-6}{2a}\ \Rightarrow b = \frac{-3}{a}\ \ldots\ldots (2)$

$a^2 - \left(\frac{-3}{a}\right)^2 = 0 \Rightarrow\ a^2 - \frac{9}{a^2} = 0 \xRightarrow{(\text{نضرب}\times a^2)} a^4 - 9 = 0$

$a^4 - 9 = 0\ \Rightarrow (a^2 - 3\ )(a^2 + 3) = 0$

$either\quad a^2 - 3 = 0\ \Rightarrow\ a^2 = 3\ \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$

$b = \frac{-3}{a}\ \Rightarrow b = \frac{-3}{\pm\sqrt{3}}\ \Rightarrow b = \mp\sqrt{3}$

$or\quad a^2 + 3 = 0\ \Rightarrow\ a^2 = -3$ تهمل

$\therefore$ الجذران هما $\sqrt{3} - \sqrt{3}i\ ,\ -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$

b) $7 + 24i$

$a + bi = \sqrt{7 + 24i} \xRightarrow{\text{تربيع الطرفين}} (a + bi)^2 = 7 + 24i$

$a^2 + 2abi + b^2i^2 = 7 + 24i\ \Rightarrow\ (a^2 - b^2) + (2ab)i = 7 + 24i$

$a^2 - b^2 = 7 \ldots\ldots (1)$

$2ab = 24\ \Rightarrow\ b = \frac{24}{2a}\ \Rightarrow b = \frac{12}{a}\ \ldots\ldots (2)$

$a^2 - \left(\frac{12}{a}\right)^2 = 7 \Rightarrow\ a^2 - \frac{144}{a^2} = 7 \xRightarrow{(\text{نضرب}\times a^2)} a^4 - 144 = 7a^2$

$a^4 - 7a^2 - 144 = 0\ \Rightarrow (a^2 - 16)(a^2 + 9) = 0$

$either\quad a^2 - 16 = 0\ \Rightarrow (a + 4)(a - 4) = 0\ \Rightarrow a = \pm 4$

$b = \frac{12}{a}\ \Rightarrow b = \frac{12}{4} = 3$

$$b=\frac{12}{a}\Rightarrow b=\frac{12}{-4}=-3$$

$or\ \ a^2+9=0\Rightarrow a^2=-9$ تهمل

∴ الجذران هما $4+3i\ \ ,\ \ -4-3i$

c) $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

يجب تحويله الى الصيغة $a+bi$ عن طريق الضرب بمرافق المقام

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}i}=\frac{4}{1-\sqrt{3}i}\times\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{1^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{1+3}$$

$$\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{4}=1+\sqrt{3}i$$

$$a+bi=\sqrt{1+\sqrt{3}i}\xrightarrow{\text{تربيع الطرفين}}(a+bi)^2=1+\sqrt{3}i$$

$$a^2+2abi+b^2i^2=1+\sqrt{3}i\Rightarrow(a^2-b^2)+(2ab)i=1+\sqrt{3}i$$

$$a^2-b^2=1\ \ldots\ldots(1)$$

$$2ab=\sqrt{3}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{2b}\ \ldots\ldots(2)$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2b}\right)^2-b^2=1\Rightarrow\frac{3}{4b^2}-b^2=1\xrightarrow{(\text{نضرب}\times 4b^2)}3-4b^4=4b^2$$

$$4b^4+4b^2-3=0\Rightarrow(2b^2+3)(2b^2-1)=0$$

$$either\ \ 2b^2-1=0\Rightarrow 2b^2=1\Rightarrow b^2=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a=\frac{\sqrt{3}}{2b}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$or\ \ 2b^2+3=0\Rightarrow 2b^2=-3$ تهمل

∴ الجذران هما $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\ \ ,\ \ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

س4 / ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها هو :

a) i

∵ المعاملات أعدادحقيقية لذا فإن الجذر الآخر هو المرافق وهو $-i$

مجموع الجذرين $0+i+0+(-i)=(0+0)+(1-1)i=0+0i$

ضرب الجذرين $i.(-i)=-i^2=-(-1)=1$

$$\because\ x^2-\left(\text{مجموع الجذرين}\right)x+\left(\text{حاصل ضرب الجذرين}\right)=0$$

$$\therefore\ x^2-(0)x+(1)=0$$

المعادلة التربيعية $x^2+1=0$

b) $5-i$

$\because$ المعاملات أعدادحقيقية لذا فإن الجذر الآخر هو المرافق وهو $5+i$

مجموع الجذرين $(5-i)+(5+i)=(5+5)+(-1+1)i=10$

ضرب الجذرين $(5-i)(5+i)=25+1=26$

$\because\ x^2-(\text{مجموع الجذرين})x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$

$\therefore\ x^2-10x+25=0$

c) $\frac{\sqrt{2}+3i}{4}$

$\because$ المعاملات أعدادحقيقية لذا فإن الجذر الآخر هو المرافق وهو $\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3}{4}i$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}i\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3}{4}i\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)i=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}i\right).\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3}{4}i\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{2}{16}+\frac{9}{16}=\frac{11}{16}$$

$\because\ x^2-(\text{مجموع الجذرين})x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$

$\therefore\ x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{11}{16}=0$

س5 / اذا كان $3+i$ هو أحد جذري المعادلة $x^2-ax+(5+5i)=0$ فما قيمة $a\ \in\mathbb{C}$ ؟ وما قيمة الجذر الآخر ؟ وزاري ٢٠١١ / د١

الحل : نفرض الجذر الآخر هو k

$(3+i)+k=a$ مجموع الجذرين

$(3+i)\,k=5+5i$ ضرب الجذرين

$$k=\frac{5+5i}{3+i}=\frac{5+5i}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}=\frac{15-5i+15i-5i^2}{3^2+1^2}=\frac{20+10i}{10}=2+i\ \Rightarrow\therefore k=2+i$$ الجذر الآخر

$$\because (3+i)+k=a\ \Rightarrow(3+i)+(2+i)=a\ \Rightarrow a=5+2i$$

أمثلة أضافية محلولة

مثال : أوجد الجذور التربيعية للعدد المركب $-55-48i$ ثم استخدم الناتج في ايجاد الحل للمعادلة التربيعية التالية $x^2+(1+2i)x+13(1+i)=0$

الحل : نفرض أن الجذر التربيعي للعدد $-55-48i$ هو $a+bi$

$$a+bi=\sqrt{-55-48i}\ \xrightarrow{\text{تربيع الطرفين}}\ (a+bi)^2=-55-48i$$

$$a^2+2abi+b^2i^2=-55-48i\Rightarrow\ (a^2-b^2)+(2ab)i=-55-48i$$

$$a^2-b^2=-55\ \dots\dots\dots(1)$$

$$2ab = -48 \Rightarrow a = \frac{-48}{2b} \Rightarrow a = \frac{-24}{b} \;\; \dots\dots\dots (2)$$

$$\left(\frac{-24}{b}\right)^2 - b^2 = -55 \Rightarrow \frac{576}{b^2} - b^2 = -55 \xrightarrow{\text{نضرب}\, b^2 \times} 576 - b^4 = -55b^2$$

$$b^4 - 55b^2 - 576 = 0 \Rightarrow (b^2 - 64)(b^2 + 9) = 0$$

$either \quad b^2 = 64 \Rightarrow b = \pm 8$ نعوض في معادلة (٢)

$$a = \frac{-24}{b} \Rightarrow a = \frac{-24}{\pm 8} \Rightarrow a = \mp 3$$

$or \quad b^2 + 9 = 0 \Rightarrow b^2 = -9$ تهمل

$\therefore$ الجذران هما $\quad 3 - 8i \quad , \quad -3 + 8i$

الآن نحل المعادلة $x^2 + (1 + 2i)x + 13(1 + i) = 0$ باستخدام قانون الدستور حيث

$$a = 1 \quad , \quad b = (1 + 2i) \quad , \quad c = 13(1 + i)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(1 + 2i) \pm \sqrt{(1 + 2i)^2 - (4)(1)(13 + 13i)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-(1 + 2i) \pm \sqrt{1 + 4i + 4i^2 - (52 + 52i)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-(1 + 2i) \pm \sqrt{1 + 4i - 4 - (52 + 52i)}}{2} = \frac{-(1 + 2i) \pm \sqrt{-55 - 48i}}{2}$$

$$either \quad x_1 = \frac{-1 - 2i + 3 - 8i}{2} = \frac{2 - 10\,i}{2} = 1 - 5i$$

$$or \quad x_2 = \frac{-1 - 2i - 3 + 8i}{2} = \frac{-4 + 6\,i}{2} = -2 + 3i$$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{-2 + 3i \,, 1 - 5i\}$

مثال : كون المعادلة التربيعية التي جذراها $3 - i \quad , \quad \frac{10}{3-i}$

الحل :

$$x_1 = 3 - i$$

$$x_2 = \frac{10}{3 - i} = \frac{10}{3 - i} \times \frac{3 + i}{3 + i} = \frac{10(3 + i)}{3^2 + 1^2} = \frac{10(3 + i)}{10} = 3 + i$$

$(3 - i) + (3 + i) = (3 + 3) + (-1 + 1)i = 6$ مجموع الجذرين

$(3 - i)(3 + i) = 9 + 3i - 3i - i^2 = 9 + 1 = 10$ ضرب الجذرين

$\because \; x^2 - ($مجموع الجذرين$)\,x + ($حاصل ضرب الجذرين$) = 0$

$\therefore \; x^2 - 6x + 10 = 0$ المعادلة التربيعية

مثال : جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $-8i$

الحل :

$$x^3 = -8i \Rightarrow x^3 + 8i = 0 \Rightarrow x^3 - 8i\,(i^2) = 0 \Rightarrow x^3 - 8i^3 = 0$$

$$x^3 - 8i^3 = 0 \Rightarrow (x-2i)(x^2+2xi+4i^2) = 0 \Rightarrow (x-2i)(x^2+2xi-4) = 0$$

$$either\ x - 2i = 0 \Rightarrow x = 2i$$

$$or\quad x^2 + 2ix - 4 = 0 \xRightarrow{\text{بالدستور}} a = 1 \ ,\ b = 2i \ ,\ c = -4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2i \pm \sqrt{4\,i^2 - 4\,(1)(-4)}}{2\,(1)} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4+16}}{2}$$

$$x = \frac{-2i \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2i \pm 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = -i \pm \sqrt{3}$$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{2i \ ,\ -i+\sqrt{3} \ ,\ -i-\sqrt{3}\}$

مثال : جد الجذور التكعيبية للعدد المركب 8

الحل :

$$x^3 = 8 \Rightarrow x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

$$either\ (x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$or\quad x^2 + 2x + 4 = 0 \xRightarrow{\text{بالدستور}} a = 1 \ ,\ b = 2 \ ,\ c = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\,(1)(4)}}{2\,(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{12i^2}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{2 \ ,\ -1+\sqrt{3}i \ ,\ -1-\sqrt{3}i\}$

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلةالتالية $ix^2 - 2x - 2i = 0$

الحل :

$ix^2 - 2x - 2i = 0$ (نقسم المعادلة على i)

$$\frac{ix^2}{i} - \frac{2x}{i} - \frac{2i}{i} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{2\,i^4}{i}x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2i^3x - 2 = 0$$

$$x^2 + 2ix - 2 = 0 \xRightarrow{\text{بالدستور}} a = 1 \ ,\ b = 2i \ ,\ c = -2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2i \pm \sqrt{-4+8}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-2i \pm 2}{2} = -i \pm 1$$

∴ مجموعة الحل $\{-i+1 \ , -i-1\}$

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة التالية $x^2 - 4sin\theta\, x + 4 = 0$

الحل :

$$x^2 - 4sin\theta\, x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{بالدستور}} a = 1 \quad , \quad b = -4sin\theta \quad , \quad c = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4sin\theta) \pm \sqrt{(-4sin\theta)^2 - 4\,(1)(4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4sin\theta \pm \sqrt{16(sin\theta)^2 - 16}}{2} = \frac{4sin\theta \pm \sqrt{16[(sin\theta)^2 - 1]}}{2}$$

$$x = \frac{4sin\theta \pm \sqrt{16[-(cos\theta)^2]}}{2} = \frac{4sin\theta \pm \sqrt{16[(cos\theta)^2 i^2]}}{2}$$

$$x = \frac{4sin\theta \pm 4cos\theta\, i}{2} = 2sin\,\theta \pm 2cos\theta\, i$$

∴ مجموعة الحل $\{2sin\,\theta + 2cos\theta\, i \ \ , 2sin\,\theta - 2cos\theta\, i\}$

مثال : أوجد قيمة كل من x , y من المعادلة التالية $(x+yi)^2 - \frac{8-8i}{1+i} + 15 = 0$

الحل :

$$(x+yi)^2 - \frac{8-8i}{1+i} + 15 = 0 \Rightarrow x^2 + 2xyi + y^2 i^2 = \frac{8-8i}{1+i} - 15$$

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = \left(\frac{8-8i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right) - 15$$

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = \left(\frac{8 - 8i - 8i + 8i^2}{1^2 + 1^2}\right) - 15$$

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = \left(\frac{-16i}{2}\right) - 15 \Rightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = -8i - 15$$

$$x^2 - y^2 = -15 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$2xy = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{2y} \Rightarrow x = \frac{-4}{y} \ \ldots\ldots (2)$$

$$\left(\frac{-4}{y}\right)^2 - y^2 = -15 \Rightarrow \frac{16}{y^2} - y^2 = -15 \xrightarrow{\text{نضرب}\times y^2} 16 - y^4 = -15y^2$$

$$y^4 - 15y^2 - 16 = 0 \Rightarrow (y^2 - 16)(y^2 + 1) = 0$$

$either \quad y^2 - 16 = 0 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$

$$x = \frac{-4}{y} = \frac{-4}{\pm 4} \Rightarrow x = \mp 1$$

$or \quad y^2 + 1 = 0 \Rightarrow y^2 = -1$ تهمل

مثال : كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذراها $(\sqrt{2}-i)^2$

الجذر الأول $(\sqrt{2}-i)^2 = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}i + i^2 = 1 - 2\sqrt{2}i$

$\because$ المعاملات حقيقية لذا فإن الجذر الآخر هو المرافق $1 + 2\sqrt{2}i$

المجموع $(1-2\sqrt{2}i) + (1+2\sqrt{2}i) = (1+1) + (-2\sqrt{2}i + 2\sqrt{2}i) = 2$

الضرب $(1-2\sqrt{2}i)(1+2\sqrt{2}i) = 1 + 2\sqrt{2}i - 2\sqrt{2}i - (2\sqrt{2}i)^2 = 1 + 8 = 9$

$\because\ x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

المعادلة التربيعية $\therefore\ x^2 - 2x + 9 = 0$

واجبات

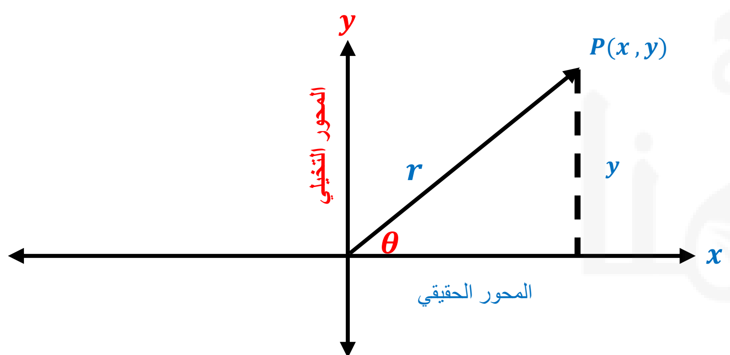
س / أوجد قيمة كل من x, y من المعادلة التالية $(x+yi)^2 = \frac{36-2i}{3+2i}$

س / جد الجذور التكعيبية للاعداد التالية $(-64i\ ,\ 64\ ,125\ ,-27i)$

س / جد الجذر التربيعي للعدد $64i$

التمثيل الهندسي للاعداد المركبة

العدد المركب $(x+yi)$ يمكن تمثيله هندسيا بالنقطة (x, y) حيث يسمى المحور $(x-axis)$ بالمحور الحقيقي وهو يمثل الجزء الحقيقي للعدد المركب أما المحور $(y-axis)$ فيسمى المحور التخيلي وهو يمثل الجزء التخيلي للعدد المركب ، ويمكن تمثيل بعض العمليات التي تجري على الاعداد المركبة تمثيلاً هندسيا وتسمى الاشكال الناتجة باشكال (أرجاند) ويسمى المستوي الذي يحتويها بالمستوى المركب وسنرمز لها بالرمز $P(x, y)$.

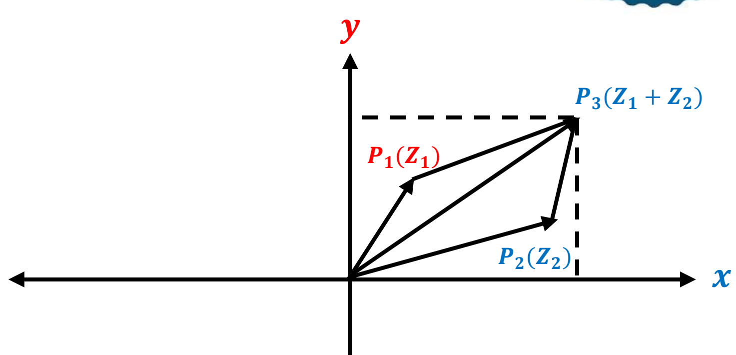


اذا كان $z_1 = x_1 + y_1 i$ ، $z_2 = x_2 + y_2 i$ عددان مركبان ممثلان بالنقطتين $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ فأن :

$z_1 + z_2 = (x_1+x_2) + (y_1+y_2)i$

ويمكن تمثيل $z_1 + z_2$ بالنقطة $P_3 = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ وذلك باستخدام المعلومات المتعلقة بالمتجهات وكما موضح بالشكل :

اي أن : $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_3}$



مثال : مثل العمليات الاتية هندسيا في شكل (ارجاند)

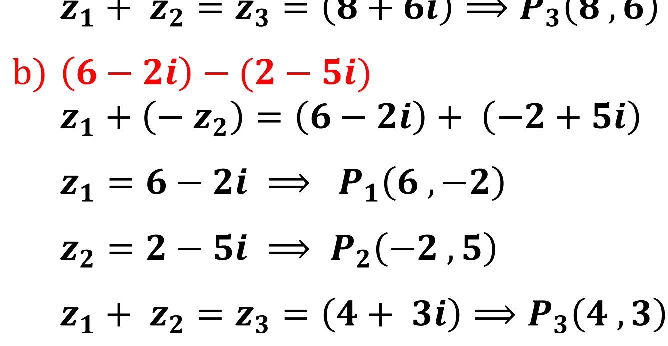
a) $(3 + 4i) + (5 + 2i)$

$z_1 = 3 + 4i \Rightarrow P_1(3,4)$

$z_2 = 5 + 2i \Rightarrow P_2(5,2)$

$z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (5 + 2i)$

$z_1 + z_2 = z_3 = (8 + 6i) \Rightarrow P_3(8,6)$



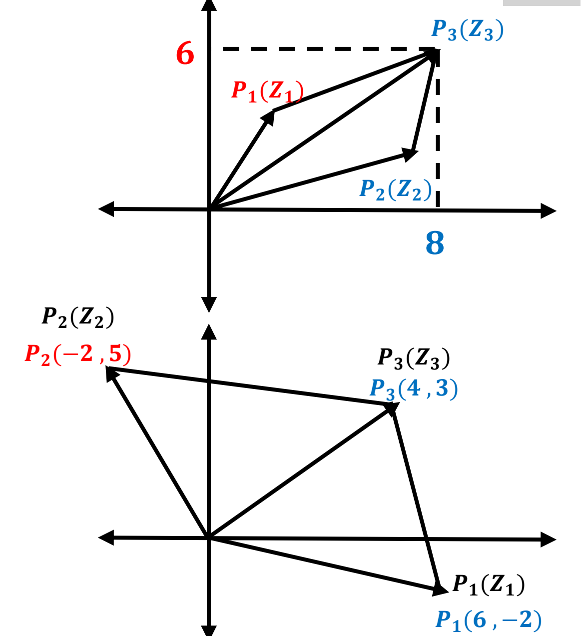
b) $(6 - 2i) - (2 - 5i)$

$z_1 + (-z_2) = (6 - 2i) + (-2 + 5i)$

$z_1 = 6 - 2i \Rightarrow P_1(6,-2)$

$z_2 = 2 - 5i \Rightarrow P_2(-2,5)$

$z_1 + z_2 = z_3 = (4 + 3i) \Rightarrow P_3(4,3)$

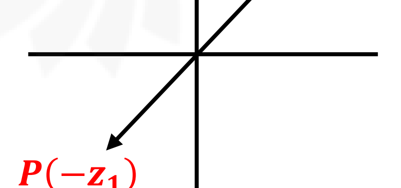


ملاحظة :

- العدد Z نظيره $-Z$ يعني اذا كانت $Z = 1 + 2i$ فإن $-Z = -1 - 2i$
- للعدد Z المرافق هو $\overline{Z}$ ويقصد به تغيير اشارة الوسط فقط $Z = 1 + 2i$, $\overline{Z} = 1 - 2i$

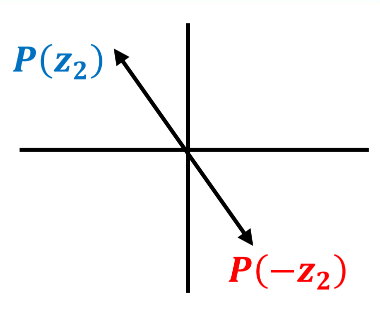
حل تمارين (3 – 1)

س1/ أكتب النظير الجمعي لكل من الاعداد الآتية ثم مثل هذه الاعداد ونظائرها الجمعية على شكل أرجاند :

التمثيل البياني	النظير	العدد
	$-z_1 = -2 - 3i$ $P(-z_1) = (-2,-3)$	$z_1 = 2 + 3i$ $P(z_1) = (2,3)$

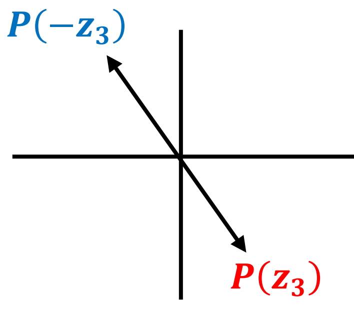
$z_2 = -1 + 3i$ $\quad$ $-z_2 = 1 - 3i$

$P(z_2) = (-1, 3)$ $\quad$ $P(-z_2) = (1, -3)$



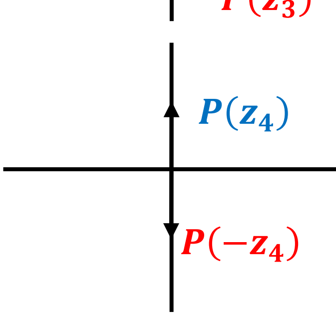
$z_3 = 1 - i$ $\quad$ $-z_3 = -1 + i$

$P(z_3) = (1, -1)$ $\quad$ $P(-z_3) = (-1, 1)$



$z_4 = i$ $\quad$ $-z_4 = -i$

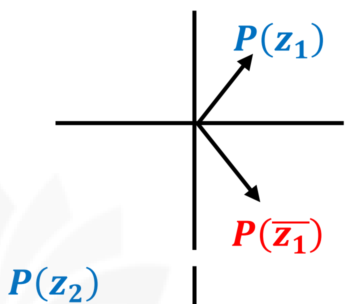
$P(z_4) = (0, 1)$ $\quad$ $P(-z_4) = (0, -1)$



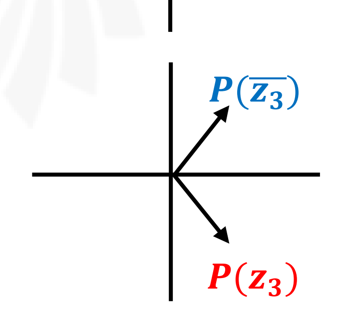
س 2 / أكتب العدد المرافق لكل من الاعداد الاتية ثم مثل الاعداد ومرافقاتها على شكل أرجاند :



العدد	مرافق العدد
$z_1 = 5 + 3i$	$\overline{z_1} = 5 - 3i$
$P(z_1) = (5, 3)$	$P(\overline{z_1}) = (5, -3)$



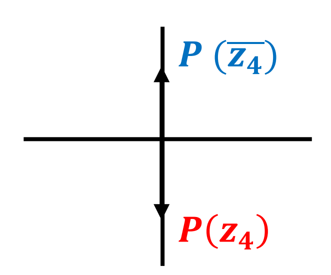
العدد	مرافق العدد
$z_2 = -3 + 2i$	$\overline{z_2} = -3 - 2i$
$P(z_2) = (-3, 2)$	$P(\overline{z_2}) = (-3, -2)$
$z_3 = 1 - i$	$\overline{z_3} = 1 + i$
$P(z_3) = (1, -1)$	$P(\overline{z_3}) = (1, 1)$





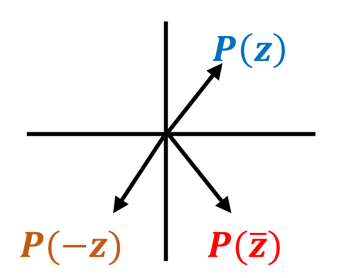
$z_4 = -2i$ $\qquad \overline{z_4} = 2i$

$P(z_4) = (0, -2)$ $\qquad P(\overline{z_4}) = (0, 2)$



س3 / اذا كانت $z = 4 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من $\bar{z}$, $-z$, z

$z = 4 + 2i$	$P(z) = (4, 2)$
$\bar{z} = 4 - 2i$	$P(\bar{z}) = (4, -2)$
$-z = -4 - 2i$	$P(-z) = (-4, -2)$



س 4 / اذا كان $z_1 = 4 - 2i$ ، $z_2 = 1 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من :

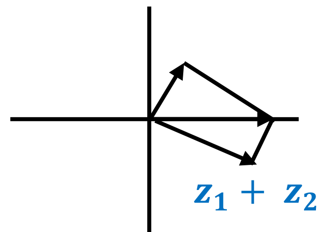
$-3z_2$, $2z_1$, $z_1 - z_2$, $z_1 + z_2$

$z_1 + z_2 = (4 - 2i) + (1 + 2i) = 5 + 0i$

$P_1(4, -2)$

$P_2(1, 2)$

$z_1 + z_2 = Z_3 = 5 + 0i \Rightarrow P_3 = (5, 0)$

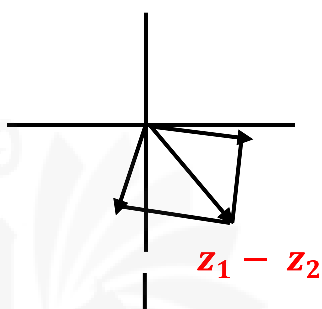


$P_1(4, -2)$

$P_2(1, 2)$

$z_1 - z_2 = (4 - 2i) - (1 + 2i) = 3 - 4i$

$z_1 - z_2 = z_3 = 3 - 4i \Rightarrow P(Z_3) = (3, -4)$



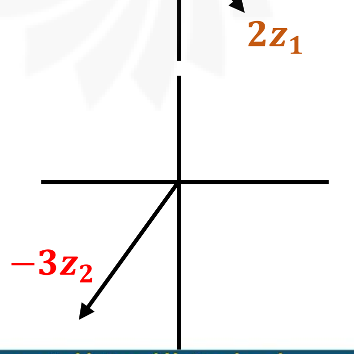
$2z_1 = 2(4 - 2i) = 8 - 4i$

$P(2z_1) = (8, -4)$

$2z_1$

$3z_2 = -3(1 + 2i) = -3 - 6i$

$P(3z_2) = (-3, -6)$



الصيغة القطبية للعدد المركب

اذا كان $z = x + yi = (x , y)$ فإن $R(z) = x = r\cos\theta$ و $I(z) = y = r\sin\theta$ حيث ان $R(z)$ الجزء الحقيقي للعدد المركب ، $I(z)$ الجزء التخيلي للعدد المركب ، (r) مقياس العدد المركب وهو عدد حقيقي غير سالب ويسمى $mod\ z$ ويرمز له بالرمز $||Z||$ وتسمى (θ) سعة العدد المركب وتكتب $\theta = arg(z)$ حيث $\theta \in [0 , 2\pi]$ ويمكن القول أن

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ أو يكتب $Z = ||z||(\cos(arg\,Z) + i\sin(arg\,Z))$

المقياس $r = ||Z|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{||Z||} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{||Z||}$$

الشكل يوضح كيفية ايجاد الزاوية بإستخدام

زاوية الاسناد وحسب موقعها والربع الذي تقع فيه

$arg(z) = \pi - \theta$ $(-,+)$	$\sin +$ $\cos -$ $\tan -$	$\sin +$ $\cos +$ $\tan +$	$arg(z) = \theta$ $(+,+)$
$arg(z) = \pi + \theta$ $(-,-)$	$\sin -$ $\cos -$ $\tan +$	$\sin -$ $\cos +$ $\tan -$	$arg(z) = 2\pi - \theta$ $(+,-)$

θ : الاسناد زاوية

مثال : جد المقياس والقيمة الاساسية للعدد المركب $Z = 1 + \sqrt{3}i$

الحل :

$$r = mod\ Z = ||Z|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{||Z||} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{||Z||} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تقع في الربع الأول

القيمة الاساسية للسعة $\theta = arg(z) = \frac{\pi}{3}$

مثال : اذا كان $Z = -1 - i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية للعدد Z

الحل :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد : $\theta = \frac{\pi}{4}$ والزاوية تقع في الربع الثالث

القيمة الاساسية للسعة $\theta = arg(z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{1} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

الصيغة القطبية $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow Z = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

مثال : عبر عن كل من الاعداد التالية بالصيغة القطبية :

a) $-2 + 2i$ وزاري ٢٠١٣ / د١

المقياس $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

القيمة الاساسية $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الاسناد : $\theta = \frac{\pi}{4}$ والزاوية تقع في الربع الثاني

سعة العدد المركب $\theta = arg(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

الصيغة القطبية $Z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

b) $2\sqrt{3} - 2i$ وزاري ٢٠١٢ / د٢

المقياس $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 \times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4$

القيمة الاساسية $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

زاوية الاسناد : $\theta = \frac{\pi}{6}$ والزاوية تقع في الربع الرابع

السعة للعدد المركب $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

الصيغة القطبية $Z = 4\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right]$

مثال : عبر بالصيغة القطبية عن كل من الاعداد التالية :

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

a) 1

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + 0} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1 \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad , \quad \theta = 0$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

b) -1

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 0} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad , \quad \theta = \pi$$

$$Z = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$$

c) i

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0 + (1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$Z = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

d) $-i$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \quad , \quad \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$Z = 1(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

الحالات الثابتة

$z = (\cos 0 + i\sin 0) = 1$

$z = (\cos\pi + i\sin\pi) = -1$

$z = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = i$

$z = (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -i$

$\pi = 180$, $2\pi = 360$, $\frac{\pi}{2} = 90$, $\frac{\pi}{3} = 60$, $\frac{\pi}{4} = 45$, $\frac{\pi}{6} = 30$, $\frac{3\pi}{2} = 270$

ملاحظة : من خلال المثال السابق يمكن ان نستنتج طريقة يمكن تطبيقها على الاعداد المركبة وكما يلي :

$$3 = 3(1) = 3(1 + 0i) = 3\ (\cos 0 + i\sin 0)$$

$$5i = 5(0 + i) = 5\ (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

$$-2 = 2\ (-1) = 2(-1 + 0i) = 2\ (\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$-7i = 7\ (-i) = 7(0 - i) = 7\ (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

مبرهنة ديموافر

$Z^n = (cos\theta + i\,sin\theta)^n = \ cos\,(n\theta) + i\,sin\,(n\theta) \quad , \qquad n \in N\,, \theta \in R$ لكل

$Z^n = (cos\theta - i\,sin\theta)^n = \ cos\,(n\theta) - i\,sin\,(n\theta) \quad , \qquad n \in N\,, \theta \in R$ لكل

$$\sqrt[n]{Z} = r^{\frac{1}{n}}\left[cos\,\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,sin\,\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \quad , \quad k = 0\,,1\,,2\,,3\,,\dots,n-1$$

مثال : أحسب $(cos\frac{3}{8}\pi + i\,sin\frac{3}{8}\pi)^4$ باستخدام مبرهنة ديموافر

الحل :

$$(cos\frac{3}{8}\pi + i\,sin\frac{3}{8}\pi)^4 = \left[cos\,\frac{12}{8}\pi + i\,sin\,\frac{12}{8}\pi\right] = cos\,\frac{3}{2}\pi + i\,sin\frac{3}{2}\pi = 0 - i$$

مثال : بين لكل $\theta \in R\,, n \in N$ فإن $(cos\theta - i\,sin\theta)^n = \ cos\,(n\theta) - i\,sin\,(n\theta)$

الحل :

$$LHS \ = \ (cos\theta - i\,sin\theta)^n = \ (cos\theta + (-i\,sin\theta))^n = (cos\theta + i\,sin(-\theta))^n$$

$$= [cos\,(-\theta) + i\,sin(-\theta)]^n \qquad (\emptyset = \ -\theta \text{ وبجعل})$$

$$= [cos\,(\emptyset) + i\,sin(\emptyset)]^n = \ cos\,(n\emptyset) + i\,sin(n\emptyset)$$

$$= cos\,(-n\theta) + i\,sin(-n\theta) = cos\,(n\theta) - i\,sin(n\theta) = RHS$$

ملاحظة : قوانين مهمة في عمليات التبسيط :

$$sin\,(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin\,(b)$$

$$sin\,(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin\,(b)$$

$$cos\,(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin\,(b)$$

$$cos\,(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin\,(b)$$

مثال : أحسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(1+i)^{11}$ وزاري ٢٠١٣ / د٢ وزاري ٢٠١٥ / د١

الحل :

(١) التحويل للصيغة القطبية

$$Z = 1 + i \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد : $\theta = \frac{\pi}{4}$ والزاوية تقع في الربع الاول

$$Z = \sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4})$$

الصيغة القطبية عندما ترفع الى n :

$$Z^n = r^n(cos\theta + i\,sin\,\theta)^n \ \Longrightarrow Z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\sin n\theta)$$

(٢) نطبق مبرهنة ديموافر

$$Z^{11} = (\sqrt{2})^{11}(cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^{11}$$

$$Z^{11} = (\sqrt{2})^{11}\left(cos\ 11.\frac{\pi}{4} + i\ sin\ 11.\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^{10}.\sqrt{2}(cos\ 11.\frac{\pi}{4} + i\ sin\ 11.\frac{\pi}{4})$$

$$Z^{11} = [2^{\left(\frac{1}{2}\right)}]^{10}.\sqrt{2}\left(cos\ 11.\frac{\pi}{4} + i\ sin\ 11.\frac{\pi}{4}\right) = 2^5.\sqrt{2}\left(cos\ \frac{11\pi}{4} + i\ sin\ \frac{11\pi}{4}\right)$$

زوجي دائما

$\overset{\frown}{2} = \frac{11}{4}$ والباقي 3 لذلك تكون الزاوية الجديدة $\frac{\pi \text{ الباقي}}{4}$ وهي $\frac{3\pi}{4}$

$3 \times 45 = 135$ تقع في الربع الثاني ، وتكون الزاوية كما يلي نقوم بحذف الباقي وأخذ $\frac{\pi}{4}$

أو نحسبها كالاتي : $\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$$-cos\ \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad ، \quad sin\ \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Z^{11} = 32\sqrt{2}\ (-cos\frac{\pi}{4} + i\ sin\frac{\pi}{4})$$

$$Z^{11} = 32\sqrt{2}\ (-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$Z^{11} = \frac{-32\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i\frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$Z^{11} = (-32 + 32i) = 32(-1 + i)$$

ملاحظة : لا يمكن التعامل مع اي زاوية الا اذا كانت بالقياس الرئيسي اي انها تقع في الفترة $0 \leq \theta \leq 2\pi$ اذا كانت الزاوية اكبر من 2π نطرح منها دورة كاملة وهي 2π واحيانا نطرح دورتين يعني 4π او ثلاث دورات يعني 6π حتى نصل الى زاوية ذات قياس رئيسي اي زاوية تقع في الفترة $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

ملاحظة : اذا كان الاس سالب فإن :

$$\because Z^{-n} = (cos\theta + i\ sin\ \theta)^{-n} = cos(-n\theta) + isin(-n\theta) = cos\ n\theta - isin\ n\theta$$

$$\therefore Z^{-n} = cos\ n\theta - isin\ n\theta$$

مثال : أحسب باستخدام مبرهنة ديموافر $\frac{1}{(1-\sqrt{3}i)^4}$

$$\frac{1}{(1-\sqrt{3}i)^4} = (1-\sqrt{3}i)^{-4}$$

١- نستخرج الصيغة القطبية

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$cos = \frac{1}{2}$, $sin = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ تقع في الربع الرابع

$2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$Z = 2\left(cos\frac{5\pi}{3} + i\,sin\frac{5\pi}{3}\right)$ الصيغة القطبية

٢- نطبق قانون مبرهنة ديموافر

$$Z^{-4} = [2\left(cos\frac{5\pi}{3} + i\,sin\frac{5\pi}{3}\right)]^{-4}$$

$$Z^{-4} = (2)^{-4}(cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})^{-4}$$

$$Z^{-4} = (2)^{-4}\,(cos\,4\,.\frac{5\pi}{3} - \ i\,sin\,4.\frac{5\pi}{3})$$

$$Z^{-4} = (2)^{-4}(cos\,\frac{20\pi}{3} - i\,sin\frac{20\pi}{3})$$

زوجي دائما

$\overset{\frown}{6} = \frac{20}{3}$ والباقي 2 لذلك تكون الزاوية الجديدة $\frac{\pi \text{ الباقي}}{3}$ وهي $\frac{2\pi}{3}$

$2 \times 60 = 120$ تقع في الربع الثاني ، وتكون الزاوية كما يلي نقوم بحذف الباقي وأخذ $\frac{\pi}{2}$

أو نحسبها كالاتي : $\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$$Z^{-4} = (2)^{-4}(cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})$$

$-cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$Z^{-4} = \frac{1}{2^4}\,(cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})$$

$$Z^{-4} = \frac{1}{16}(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) \Rightarrow Z^{-4} = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i$$

ملاحظة : اذا Z_2 ، Z_1 بالصيغة القطبية فإن حاصل ضربهما يساوي حاصل ضرب مقياسيهما في حاصل جمع سعتيهما .

مثال : احسب Z_2 , Z_1 اذا كان

$$Z_1 = 2(\,cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\,)$$

$$Z_2 = 3\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\,\frac{\pi}{3}\right)$$

الحل :

$$Z_1.Z_2 = \ 3 \times 2\;[cos\;(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) + isin(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3})]$$

$$Z_1.Z_2 = 6(\cos\pi + i\sin\pi) = 6(-1+0) = -6$$

ملاحظة : حاصل قسمة عددين مركبين

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_1)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

حيث ان حاصل قسمة عددين مركبين = حاصل قسمة المقياس الاول على مقياس الثاني مضروب بحاصل طرح سعتيهما (سعة الاول – سعة الثاني)

مثال : اذا كان

$$Z_1 = 4(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2})$$

$$Z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

فجد $\frac{Z_1}{Z_2}$

الحل :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{4(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})}{(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2})}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = 4[\cos(\frac{5\pi}{4} - \frac{5\pi}{2}) + i\sin(\frac{5\pi}{4} - \frac{5\pi}{2})]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = 4[\cos\left(\frac{-5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{4}\right)]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} - i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

مثال : جد ما يأتي : $\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)}$

$$\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)} = \cos(2\theta - 3\theta) + i\sin(2\theta - 3\theta)$$

$$= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

مثال : حل المعادلة : $x^3 + 1 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$

الحل :

$$\because x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$$

$$x^3 = -1 + 0i \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+0} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

زاوية الاسناد : $\theta = \pi$

$x^3 = cos\pi + i\,sin\pi$ بالجذر التكعيبي

$\therefore x = (cos\pi + isin\pi)^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[n]{x} = r^{\frac{1}{n}}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$

$x = \left[cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right] \quad k = 0, 1, 2$

عندما $k = 0$ $\quad x_1 = (cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

عندما $k = 1$ $\quad x_2 = \left(cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right) = \left(cos\frac{3\pi}{3} + i\,sin\frac{3\pi}{3}\right) = (cos\pi + i\,sin\,\pi)$

$x_2 = -1 + (0)i = -1$

عندما $k = 2$ $\quad x_3 = \left(cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right) = \left(cos\frac{5\pi}{3} + i\,sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

مجموعة الحل $= \left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

مثال: اوجد الصيغة القطبية للمقدار $(\sqrt{3} + i)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له :

$Z = \sqrt{3} + i \implies r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

$cos\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad sin\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$

زاوية الاسناد : $\theta = \frac{\pi}{6}$ والزاوية تقع في الربع الاول

$Z = 2(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6})$ الصيغة القطبية

$Z^2 = (2)^2(cos\,\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6})^2$

$Z^2 = 4(cos2\,\frac{\pi}{6} + i\,sin\,2\frac{\pi}{6} = 4\left(cos\,\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$

$(Z^2)^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{1}{5}}(cos\,\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3})^{\frac{1}{5}}$

$\sqrt[n]{Z} = r^{\frac{1}{n}}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$

$\sqrt[5]{z^2} = \sqrt[5]{4}\left(\frac{cos\frac{\pi + 6k\pi}{3}}{5} + i\frac{sin\frac{\pi + 6k\pi}{3}}{5}\right)$

$\sqrt[5]{z^2} = \sqrt[5]{4}\left(cos\frac{\pi + 6k\pi}{15} + i\,sin\frac{\pi + 6k\pi}{15}\right) \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$

عندما $k = 0$ $\quad Z_1 = \sqrt[5]{4}\left(cos\frac{\pi}{15} + i\,sin\frac{\pi}{15}\right)$

$Z_2 = \sqrt[5]{4}(cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15})$ عندما $k = 1$

$Z_3 = \sqrt[5]{4}(cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15})$ عندما $k = 2$

$Z_4 = \sqrt[5]{4}(cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15})$ عندما $k = 3$

$Z_5 = \sqrt[5]{4}\left(cos\frac{5\pi}{3} + i\,sin\frac{5\pi}{3}\right)$ عندما $k = 4$

مثال: جد باستخدام مبرهنة ديموافر $(sin\frac{\pi}{3} + i\,cos\frac{\pi}{3})^{10}$

الحل :

$$\left(sin\frac{\pi}{3} + i\,cos\frac{\pi}{3}\right)^{10} = \left(-i^2\,sin\frac{\pi}{3} + i\,cos\frac{\pi}{3}\right)^{10} = \left(i\left(-i\,sin\frac{\pi}{3} + cos\frac{\pi}{3}\right)\right)^{10}$$

$$(i^{10})\left(cos\frac{\pi}{3} - i\,sin\frac{\pi}{3}\right)^{10} = -\left(cos\frac{10\pi}{3} - i\,sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

$$= -\left(cos\frac{4\pi}{3} - i\,sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\left(-cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3}\right) = -\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ملاحظة : يمكن حلها بتحويل داخل القوس الى عدد مركب (صيغة جبرية) ثم تحويلها الى الصيغة القطبية ثم تطبيق مبرهنة ديموافر .

ويمكن استخدام القانون الذي يمكن تحويل الـ $cos\theta = sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, $sin\theta = cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ لتتحول الى الصيغة القطبية .

واجب

س / باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $3 + 3i$

حل تمارين (4 - 1)

س1 / احسب ما يلي :

a) $[cos\frac{5}{24}\pi + i\,sin\frac{5}{24}\pi]^4 = \left[cos4\frac{5}{24}\pi + i\,sin4\frac{5}{24}\pi\right] = [cos\frac{5\pi}{6} + i\,sin\frac{5\pi}{6}]$

تقع في الربع الثاني $\frac{\pi}{6} = 30$, $5 \times 30 = 150$

$$= -cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6} = [-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i]$$

b) $[cos3\frac{7}{12}\pi + i\,sin\frac{7}{12}\pi]^{-3}$

$$[cos\left(-3\frac{7}{12}\pi\right) + i\,sin(-3\frac{7}{12}\pi)] = [cos\frac{-7\pi}{4} + i\,sin\frac{-7\pi}{4}] = [cos\frac{7\pi}{4} - i\,sin\frac{7\pi}{4}]$$

تقع في الربع الرابع $\frac{\pi}{4}=45 \quad , \quad 7\times 45=315$

$$=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

س2 / احسب باستخدام مبرهنة ديموافر (أو التعميم) ما يأتي :

a) $(1-i)^7$ وزاري ٢٠١٢ / د١

$z=1-i \Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

زاوية الاسناد : $\frac{\pi}{4}$ والزاوية تقع في الربع الرابع $\theta=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{8\pi-\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

الصيغة القطبية $Z=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$

نبدأ بتطبيق مبرهنة ديموافر

$$Z^7=(\sqrt{2})^7(\cos\theta+i\sin\theta)^7=(\sqrt{2})^7(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})^7$$

$$Z^7=(\sqrt{2})^7\left(\cos 7\frac{7\pi}{4}+i\sin 7\frac{7\pi}{4}\right)=(\sqrt{2})^6\sqrt{2}(\cos\frac{49\pi}{4}+i\sin\frac{49\pi}{4})$$

زوجي دائما

$\overset{\frown}{12}=\frac{49}{4}$ والباقي 1 لذلك تكون الزاوية الجديدة $\frac{\text{الباقي}\ \pi}{4}$ وهي $\frac{\pi}{4}$ تقع في الربع الرابع

$$=(2^3)\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+i\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=8+8i$$

b) $(\sqrt{3}+i)^{-9}$ وزاري ٢٠١٤ / د٢

$Z=\sqrt{3}+i \Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$

زاوية الاسناد : $\theta=\frac{\pi}{6}$ الزاوية تقع في الربع الاول

الصيغة القطبية $Z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

نبدأ بتطبيق مبرهنة ديموافر

$$Z^{-9}=(\sqrt{3}+1)^{-9}=r^{-9}(\cos\theta+i\sin\theta)^{-9}=(2)^{-9}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^{-9}$$

$$Z^{-9}=\frac{1}{(2)^9}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^{-9}=\frac{1}{512}\left(\cos\left(\frac{-9\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-9\pi}{6}\right)\right)$$

$$Z^{-9} = \frac{1}{512}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{512}\left(\cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$Z^{-9} = \frac{1}{512}(0 - i(-1)) = \frac{i}{512}$$

س3 / بسط ما ياتي : وزاري ٢٠١٣ / د٢

a) $\frac{[\cos 2\theta + i\sin 2\theta]^5}{[\cos 3\theta + i\sin 3\theta]^3}$

$$\frac{[\cos 2\theta + i\sin 2\theta]^5}{[\cos 3\theta + i\sin 3\theta]^3} = \frac{[(\cos\theta + i\sin\theta)^2]^5}{[(\cos\theta + i\sin\theta)^3]^3} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^9} = \cos\theta + i\sin\theta$$

b) $(\cos\theta + i\sin\theta)^8(\cos\theta - i\sin\theta)^4$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^8(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^4$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^8(\cos\theta + i\sin\theta)^{-4} = (\cos\theta + i\sin\theta)^4$$

$$= \cos 4\theta + i\sin 4\theta$$

س4 / جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}i$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر

$$Z = -1 + \sqrt{3}i \Rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد : $\theta = \frac{\pi}{3}$ الزاوية تقع في الربع الثاني $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$$\sqrt{Z} = \sqrt{-1+\sqrt{3}i} \Rightarrow (-1+\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}} = (r)^{\frac{1}{2}}(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$Z^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right]$$

$$Z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi + 6k\pi}{3}}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi + 6k\pi}{3}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi + 6k\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi + 6k\pi}{6}\right)$$

عندما $k = 0$

$$Z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

عندما $k = 1$

$$Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{8\pi}{6} + i\sin\frac{8\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

زاوية الاسناد : $\frac{4\pi}{3}$ تقع في الربع الثالث $\theta = \pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi - 3\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$$Z_2 = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

س5 / باستخدام نتيجةمبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد $27i$

$$Z = 27i \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(27)^2} = 27$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{27} = 0 \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{27}{27} = 1$$

زاوية الاسناد ؛ $\theta = \frac{\pi}{2}$ والزاوية تقع في الربع الأول

$$\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{27i} \Rightarrow Z^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}}(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$Z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right) \qquad k = 0, 1, 2$$

$$Z^{\frac{1}{3}} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi + 4k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 4k\pi}{6}\right)\right)$$

$$if \quad k = 0 \Rightarrow Z_1 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right]$$

$$if \quad k = 1 \Rightarrow Z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

زاوية الاسناد ؛ $\frac{5\pi}{6}$ الزاوية تقع في الربع الثاني $\theta = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

$$Z_2 = 3\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left[\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = \left[\frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right]$$

$$if \quad k = 2 \Rightarrow Z_3 = 3\left(\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$$Z_3 = 3\,(0 + (-1)i) = 0 - 3i = -3i$$

س6 / جد الجذور الاربع للعدد (-16) باستخدام نتيجة مبرهنة ديموا فر . وزاري ٢٠١٨ دور ١ إحيائي

الصيغة الوزارية ؛ جد حل المعادلة حيث $x \in \mathbb{C}$ وباستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر $x^4 + 16 = 0$

$$Z = -16 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(16)^2} = 16$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-16}{16} = -1 \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{16} = 0$$

زاوية الاسناد ؛ $\theta = \pi$

$$\sqrt[4]{Z} = \sqrt[4]{-16} \Rightarrow Z^{\frac{1}{4}} = r^{\frac{1}{4}}(cos\theta + i\,sin\theta)^{\frac{1}{4}} = (16)^{\frac{1}{4}}\,(cos\pi + i\,sin\pi)^{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[n]{Z} = r^{\frac{1}{n}}\left[cos\,\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,sin\,\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$Z^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16}\,\left(cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{n}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{n}\right)\right) \quad n = 4 \quad , \quad k = 0,1,2,3$$

$$if\ \ k = 0 \ \Rightarrow Z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right] = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$if\ \ k = 1 \ \Rightarrow Z_2 = 2\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_2 = 2(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$if\ \ k = 2 \ \Rightarrow Z_3 = 2\left(cos\frac{5\pi}{4} + i\,sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-cos\frac{\pi}{4} - i\,sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$Z_3 = 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$if\ \ k = 3 \ \Rightarrow Z_4 = 2\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(cos\frac{\pi}{4} - i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_4 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

س7 / جد الجذور الستة للعدد $(-64i)$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر

$$Z = -64i \ \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-64)^2} = \sqrt{(64)^2} = 64$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{64} = 0 \quad , \ sin\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{-64}{64} = -1$$

زاوية الاسناد ، $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$$\sqrt[6]{Z} = \sqrt[6]{-64i} \Rightarrow Z^{\frac{1}{6}} = r^{\frac{1}{6}}(cos\theta + i\,sin\theta)^{\frac{1}{6}} = (64)^{\frac{1}{6}}\,(cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2})^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[n]{Z} = r^{\frac{1}{n}}\left[cos\,\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,sin\,\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$Z^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = \left[cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right) + i\,sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right)\right]$$

$$Z^{\frac{1}{6}} = 2\,\left[cos\left(\frac{3\pi+4k\pi}{12}\right) + i\,sin\left(\frac{3\pi+4k\pi}{12}\right)\right] \quad , \quad k = 0,1\,,2\,,..5$$

$$if\ \ k = 0 \ \Rightarrow \ Z_1 = 2\left(cos\frac{3\pi}{12} + i\,sin\frac{3\pi}{12}\right) = 2(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$



$$if\ \ k=1 \Rightarrow Z_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$if\ \ k=2 \Rightarrow Z_3 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$if\ \ k=3 \Rightarrow Z_4 = 2\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_4 = 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$

$$if\ \ k=4 \Rightarrow Z_5 = 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

$$if\ \ k=5 \Rightarrow Z_6 = 2\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$

حل التمارين العامة الخاصة بالفصل الأول

س1/ جد قيم $x, y \in R$ والتي تحقق $\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i}$ (وزاري ٢٠١٣ / د٣)

الحل : بما ان $4 = -4i^2$

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2-4i^2}{x+2i} \Rightarrow \frac{y}{1+i} = \frac{(x+2i)(x-2i)}{x+2i} \Rightarrow \frac{y}{1+i} = (x-2i)$$

$$y = (1+i)(x-2i)$$

$$y = x - 2i + xi - 2i^2$$

$$y + 0i = x + 2 - 2i + xi$$

$$y + 0i = (x+2) + (-2+x)i$$

$$y = x + 2 \quad \ldots..(1)$$

$$0 = -2 + x \quad \ldots(2) \quad \Rightarrow \quad x = 2$$ نعوض في معادلة (١)

$$\therefore\ y = 2 + 2 = 4$$

س2/ اذا كان $z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{-3}}$ عدداً مركبا جد باستخدام مبرهنة ديموافر $z^{\frac{1}{2}}$

الحل :

$$\because \sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i$$

$$z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-3i^2}{1+3} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$$

$$\therefore z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$ المقياس

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

نستنتج أن الزاوية θ تقع في الربع الثالث

$$\therefore arg\,(z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{3}$$

الصيغة القطبية للعدد المركب

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[n]{Z} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$z^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$z^{\frac{1}{2}} = \left[\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)\right] \quad k = 0\,, 1$$

$$if \quad k = 0 \Rightarrow Z_1 = \cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$\frac{2\pi}{3}$ تقع في الربع الثاني

$$Z_1 = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$if \quad k = 1 \Rightarrow Z_2 = \left[\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2\pi}{2}\right)\right]$$

$$Z_2 = \cos\left(\frac{\frac{4\pi+6\pi}{3}}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{4\pi+6\pi}{3}}{2}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{6}\right)$$

$\frac{10\pi}{6}$ تقع في الربع الرابع

$$Z_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

س / اذا كان $Z = \cos 2x + i\sin 2x$ فاثبت أن $\frac{2}{1+z} = 1 - i\tan x$

وزاري خارج القطر ٢٠١٩ / دور أول

الحل : ط 1

$$LHS: \frac{2}{1+z} = \frac{2}{1+\cos 2x + i\sin 2x}$$

$$= \frac{2}{1+2\cos^2 x - 1 + 2i\sin x\cos x}$$

$$= \frac{2}{2\cos x(\cos x + i\sin x)} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x(\cos x + i\sin x)} = \frac{\cos^2 x - i^2\sin^2 x}{\cos x(\cos x + i\sin x)}$$

$$= \frac{(\cos x - i\sin x)(\cos x + i\sin x)}{\cos x(\cos x + i\sin x)} = \frac{(\cos x - i\sin x)}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{i\sin x}{\cos x} = 1 - i\tan x \ : RHS$$

ط 2 :

$$LHS: \frac{2}{1+z} = \frac{2}{1+\cos 2x + i\sin 2x}$$

$$= \frac{2}{1+2\cos^2 x - 1 + 2i\sin x\cos x}$$

$$= \frac{2}{2\cos x(\cos x + i\sin x)} = \frac{(\cos x + i\sin x)^{-1}}{\cos x} = \frac{(\cos x - i\sin x)}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{i\sin x}{\cos x} = 1 - i\tan x \ : RHS$$

س/ اذا كان $Z = \cos\theta + i\sin\theta$ اثبت أن $\frac{Z^n}{1+Z^{2n}} = \frac{1}{2\cos n\theta}$ وزاري ٢٠١٩ / دور ثاني

الحل :

$$LHS: \frac{Z^n}{1+Z^{2n}} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{1+(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n}}$$

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{1+(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n}} = \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1+\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta}$$

$$= \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1+2\cos^2 n\theta - 1 + i(2\sin n\theta\cos n\theta)} = \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{2\cos^2 n\theta + i(2\sin n\theta\cos n\theta)}$$

$$= \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{2\cos n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)} = \frac{1}{2\cos n\theta} \ : RHS$$



الفصل الثاني
القطوع المخروطية



القطوع المخروطية

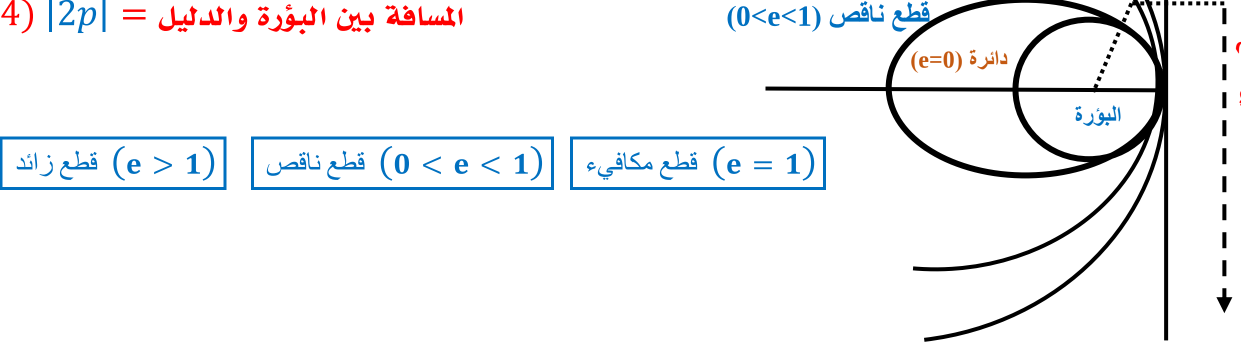
القطع المخروطي : ليكن (x_1 , y_1) نقطة ثابتة في المستوي وليكن $ax + by + c = 0$ مستقيم ثابت في المستوي نفسه لذا فإن مجموعة كل النقاط التي نسبة بعد كل منها عن النقطة (x_1 , y_1) الى بعدها عن المستقيم $ax + by + c = 0$ تساوي عدد ثابت (e) تكون شكل هندسي يسمى بالقطع المخروطي أو هو مجموعة النقط التي بعدها عن نقطة معلومة يساوي بعدها عن مستقيم معلوم $(ax + by + c = 0)$ تساوي عدداً ثابتا (e) :

1) $F(x, y)$ البؤرة

2) $ax + by + c = 0$ معادلة الدليل

3) e الاختلاف المركزي $\left(e = \frac{c}{a}\right)$

4) $|2p| =$ المسافة بين البؤرة والدليل



المعادلة العامة للقطع المخروطي :

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = e^2 \frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2}$$

ملاحظات :

1) النقطة السينية (تقع على المحور السيني) أحداثيها الصادي يكون صفراً $(x , 0)$.

2) النقطة الصادية (تقع على المحور الصادي) إحداثيها السيني يكون صفراً $(0 , y)$.

3) كل مستقيم يوازي المحور السيني معادلته تكون (ما يقطعه من المحور y)

4) كل مستقيم يوازي المحور الصادي معادلته تكون (ما يقطعه من المحور x)

القطع المكافئ Parabola

القطع المكافئ : هو مجموعة النقط $M\ (x , y)$ في المستوي والتي يكون بعدها عن نقطة ثابتة $F(p , 0)$ تسمى البؤرة حيث $p \neq 0$ يساوي بعدها عن مستقيم معلوم يسمى (الدليل D) وهو لا يحتوي البؤرة .

أو بمعنى آخر هو مجموعة من النقط داخل مستوي والتي يكون بعدها عن نقطة معلومة مساويا لبعدها عن مستقيم معلوم .

للقطع المكافئ حالتان هما :

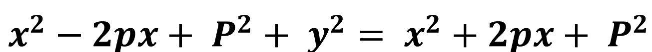
أولاً : البؤرة تقع على المحور السيني $(x - axis)$ والرأس في نقطة الاصل .

١- الفتحة نحو اليمين :

قانون البعد $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

تعريف القطع المكافئ $\frac{MF}{MQ} = e = 1 \Rightarrow MF = MQ$

بتربيع الطرفين $\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$



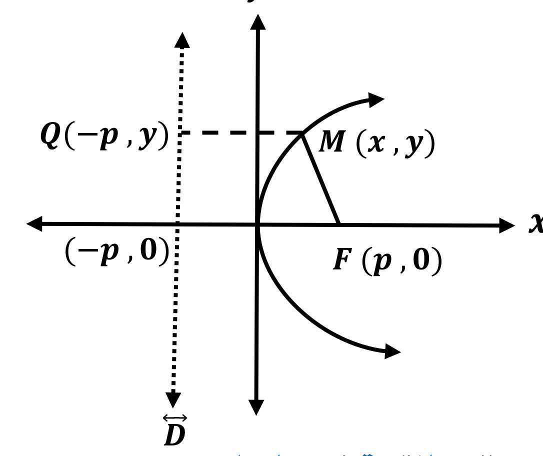
$x^2 - 2px + P^2 + y^2 = x^2 + 2px + P^2$

معادلة القطع المكافئ $\therefore y^2 = 4px \quad \forall\, p > 0$

معادلة الدليل



$x = -p$



٢- الفتحة نحو اليسار :

معادلة القطع المكافئ $y^2 = -4px$

معادلة الدليل $x = p$

ثانيا : البؤرة تقع على محور الصادات $(y - axis)$ والرأس في نقطة الاصل :

١- الفتحة نحو الاعلى :

تكون هنا معادلة القطع دالة حقيقية

قانون البعد $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

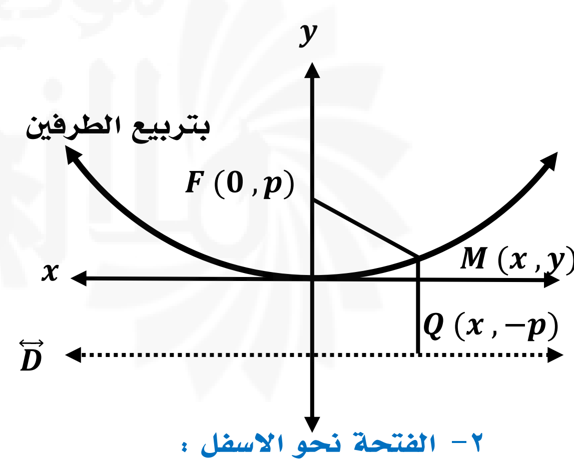
تعريف القطع المكافئ $MF = MQ$

بتربيع الطرفين $\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$

$x^2 + y^2 - 2py + P^2 = y^2 + 2py + P^2$

معادلة القطع المكافئ $x^2 = 4py \quad \forall\, p > 0$

معادلة الدليل $y = -p$



٢- الفتحة نحو الاسفل :

معادلة القطع المكافئ $x^2 = -4py$

معادلة الدليل $y = p$

نلاحظ مما سبق انه يوجد معادلتين للقطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل $(0\,,0)$ أحداهما عندما يكون على المحور السيني والاخرى عندما يكون على المحور الصادي والجدول أدناه يوضح ذلك :

عندما يكون على محور السينات $x-axis$	عندما يكون على محور الصادات $y-axis$
١) البؤرة تنتمي لمحور السينات $x-axis$	١) البؤرة تنتمي لمحور الصادات $y-axis$
٢) البؤرة $F\,(p\,,0)$ ومعادلة الدليل $x=-p$	٢) البؤرة $F\,(0\,,p)$ ومعادلة الدليل $y=-p$
٣) معادلة محور القطع هي $y=0$	٣) معادلة محور القطع هي $x=0$
٤) الدليل يوازي المحور الصادي	٤) الدليل يوازي المحور السيني
٥) التناظر حول محور السينات	٥) التناظر حول محور الصادات
٦) المحور السيني ينصف الدليل	٦) المحور الصادي ينصف الدليل
٧) القانون $y^2=4px$	٧) القانون $x^2=4py$

ملاحظات عامة :

١. اشارة البؤرة عكس اشارة الدليل والعكس صحيح .
٢. المسافة بين البؤرة والدليل $=2p$
٣. كل نقطة تنتمي للقطع المكافئ فهي تحقق معادلته (اي ان القطع المكافئ يمر بها)
٤. كل نقطة تنتمي للقطع المكافئ بعدها عن البؤرة يساوي بعدها عن الدليل .
٥. رأس القطع المكافئ هو نقطة الاصل ومعادلة المميز الخاصة به هي $b^2-4ac=0$

جدول تظهر فيه جميع حالات القطع المكافئ :

التناظر	اتجاه القطع	المحور	الدليل	البؤرة	المعادلة
$x-axis$	يمين	x	$x=-p$	$F\,(p\,,0)$	$y^2=4px$
$x-axis$	يسار	x	$x=p$	$F\,(-p\,,0)$	$y^2=-4px$
$y-axis$	أعلى	y	$y=-p$	$F\,(0\,,p)$	$x^2=4py$
$y-axis$	أسفل	y	$y=p$	$F\,(0\,,-p)$	$x^2=-4py$

مثال : جد البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ في كل مما يأتي:

a) $y^2=-8x$

$y^2=-8x$

$y^2=-4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

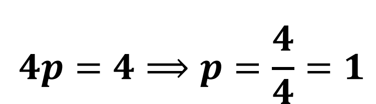
$4p=8 \Rightarrow p=\frac{8}{4}=2$

$F\,(-p\,,0)=F\,(-2\,,0)$ البؤرة

$x=p \Rightarrow x=2$ معادلة الدليل

b) $y^2 = 4x$

الحل : $y^2 = 4px \quad \because$

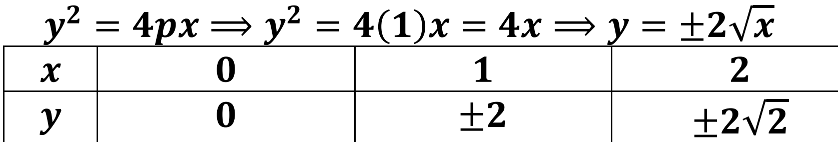


$$4p = 4 \Rightarrow p = \frac{4}{4} = 1$$

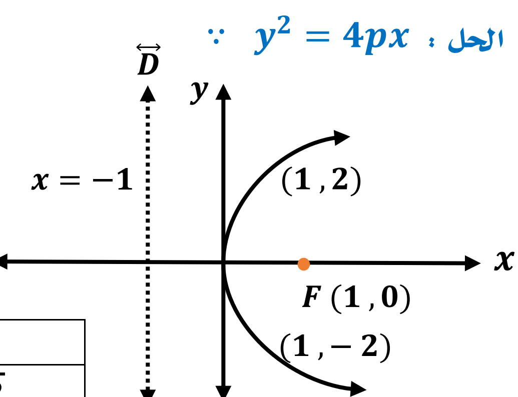
$F\,(p\,,0) = F(1\,,0)$ البؤرة

$x = -p \;\Rightarrow x = -1$ معادلة الدليل

$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4(1)x = 4x \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{x}$



x	0	1	2
y	0	± 2	$\pm 2\sqrt{2}$



ملاحظات لإيجاد معادلة القطع المكافئ رأسه نقطة الاصل ضمن الحالات الرئيسية الاتية :

أولا : اذا علمت بؤرة القطع المكافئ فإن الحل يكون بشكل مباشر تستخرج قيمة p ونكتب المعادلة ونعوض .

ثانيا : اذا علمت معادلة الدليل فإن البؤرة ستكون على نفس المحور الذي يقطعه الدليل بالاتجاه الاخر فنقوم باستخراج احداثي البؤرة ثم نستخرج قيمة p ونكتب المعادلة ونعوض .

مثال : جد معادلة القطع المكافئ اذا علمت ان أ) بؤرته هي $(3\,,0)$ ورأسه في نقطة الاصل .

ب) معادلة الدليل $2x - 6 = 0$ ورأسه في نقطة الاصل .

الحل : أ)

$\because (p\,,0) = (3\,,0)$ البؤرة

$\therefore p = 3 \;\Rightarrow y^2 = 4px$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ

$\therefore y^2 = 4(3)x \;\Rightarrow\; y^2 = 12x$ معادلة القطع المكافئ

ب)

$\because 2x - 6 = 0$ معادلة الدليل

$\therefore 2x = 6 \;\Rightarrow x = 3$

$\therefore p = 3 \;\Rightarrow\; y^2 = -4px$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ

$\therefore y^2 = -4(3)x \Rightarrow\; y^2 = -12x$ معادلة القطع المكافئ

مثال : جد معادلة القطع المكافئ اذا علم : أ) بؤرته $(0\,,5)$ وراسه في نقطة الأصل

ب) معادلة الدليل $y = 7$ ورأسه في نقطة الاصل

الحل : أ)

$\because (\,0\,,p) = (0\,,5)$ البؤرة

$\therefore p = 5 \;\Rightarrow x^2 = 4py$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ

$\therefore x^2 = 4(5)x \;\Rightarrow\; x^2 = 20y$ معادلة القطع المكافئ

ب)

$\because y = 7$ بالمقارنة مع معادلة الدليل

$\therefore p = 7 \;\Rightarrow x^2 = -4py$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ

$x^2 = -4(7)y \Rightarrow\; x^2 = -28y$ معادلة القطع المكافئ

ثالثا : اذا مر القطع المكافئ بنقطة معينة فإنها تحقق معادلته فإذا كانت البؤرة تنتمي الى محور السينات تكتب إحدى معادلتي محور السينات ثم التعويض بها لإستخراج قيمة p ثم اعادة تعويضها بمعادلة القطع المكافئ واذا كانت البؤرة تنتمي لمحور الصادات كذلك نكتب احدى معادلتي محور الصادات ثم التعويض بها لإستخراج قيمة p ثم اعادة تعويضها بمعادلة القطع المكافئ وفي حالة لم يحدد موقع البؤرة يتم اخذ احتمالان معا .

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات ورأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطة $(2, 4)$.

الحل : بما ان النقطة تقع بالربع الأول والبؤرة تقع على محور السينات فإن البؤرة تقع على محور السينات الموجب فتكون المعادلة

$$y^2 = 4px \Rightarrow (4)^2 = 4p(2) \Rightarrow 16 = 8p \Rightarrow p = \frac{16}{8} = 2$$

$$\therefore y^2 = 8x$$

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته تقع على محور الصادات ويمر بالنقطة $(-1, -4)$.

الحل : بما ان النقطة تقع بالربع الثالث والبؤرة تقع على محور الصادات فإن البؤرة تقع على محور الصادات السالب فتكون المعادلة

$$x^2 = -4py \Rightarrow (-1)^2 = -4p(-4) \Rightarrow 1 = 16p \Rightarrow p = \frac{1}{16}$$

$$\therefore x^2 = -\frac{1}{4}y$$

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطة $(-2, 6)$.

الحل : يوجد احتمالين للمعادلة القياسية للقطع المكافئ لعدم تحديد البؤرة ، والاحتمالين هما :

أولاً : البؤرة تنتمي لمحور الصادات الموجب	ثانيا : البؤرة تنتمي لمحور السينات السالب
$x^2 = 4py$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(-2)^2 = 4p(6)$ $4 = 24p \Rightarrow p = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ $x^2 = 4\left(\frac{1}{6}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3}y$ معادلة القطع المكافئ	$y^2 = -4px$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(6)^2 = -4p(-2)$ $36 = 8p \Rightarrow p = \frac{9}{2}$ $y^2 = -4\left(\frac{9}{2}\right)x \Rightarrow y^2 = -18x$ معادلة القطع المكافئ

رابعا : اذا مر القطع المكافئ بنقطتين تقعان في ربعين متجاورين فإن البؤرة تقع على محور تناظر الربعين فنقوم بكتابة المعادلة المناسبة ثم نقوم بتعويض اي نقطة من النقطتين لاستخراج قيمة p ثم اعادة تعويضها بمعادلة القطع .

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2, 4), (2, -4)$ ورأسه نقطة الاصل .

الحل : ∵ النقطتان تقعان بالربعين الأول والرابع فهذا يعني ان البؤرة تقع على محور السينات الموجب وبالتالي تكون معادلة القطع المكافئ هي

$$y^2 = 4px \Rightarrow (4)^2 = 4p(2) \Rightarrow 16 = 8p \Rightarrow p = \frac{16}{8} = 2$$

$$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4(2)x \Rightarrow y^2 = 8x$$ معادلة القطع المكافئ

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(-2\sqrt{3}\,,-1),(\sqrt{6}\,,-\frac{1}{2})$

الحل : بما ان النقطتين تقعان في الربعين الثالث والرابع فإن البؤرة تقع على محور الصادات السالب وبذلك تكون معادلة القطع المكافئ هي

$$x^2 = -4py \Rightarrow (\sqrt{6})^2 = -4p\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 6 = 2p \Rightarrow p = 3$$

$$x^2 = -4py \Rightarrow x^2 = -4(3)y \Rightarrow x^2 = -12y$$ معادلة القطع المكافئ

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(-4,-1)\,,(4,-1)$ والرأس في نقطة الاصل .

الحل : بما ان النقطتين تقعان في الربعين الثالث والرابع فإن البؤرة تقع على محور الصادات السالب وبذلك تكون معادلة القطع المكافئ هي

$$x^2 = -4\,py$$

$$(-4)^2 = -4\,p(-1) \Rightarrow 16 = -4\,p\,(-1) \Rightarrow 16 = 4p \Rightarrow p = \frac{16}{4} = 4$$

$$x^2 = -4\,(4)y \Rightarrow x^2 = -16y$$ معادلة القطع المكافئ

خامسا : اذا مر دليل القطع المكافئ بنقطة معينة $(a\,,b)$ فاذا كانت البؤرة تقع على محور السينات فإن معادلة الدليل هي $x = a$ فنقوم باستخراج احداثي البؤرة ثم نستخرج قيمة p ثم نكتب المعادلة المناسبة ثم التعويض بها ، واذا كانت البؤرة تنتمي لمحور الصادات فإن معادلة الدليل هي $y = b$ فنقوم باستخراج احداثي البؤرة ثم نستخرج قيمة p ونكتب المعادلة المناسبة ونعوض بها وفي حالة عدم تحديد موقع البؤرة فيتم اخذ احتمالان معا .

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي لمحور السينات ودليله يمر بالنقطة $(-2\,,3)$.

الحل : بما ان محور القطع المكافئ هو محور السينات والدليل يمر بنقطة تقع في الربع الثاني فإن البؤرة تقع على المحور السيني الموجب وبالتالي تكون

$x = -2$ معادلة الدليل $F(2\,,0) \Rightarrow p = 2 \Rightarrow y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 8x$

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي لمحور الصادات ودليله يمر بالنقطة $(2\,,-4)$.

الحل : البؤرة صادية موجبة فتكون معادلة الدليل هي :

$$y = -4 \Rightarrow F(0,4) \Rightarrow p = 4 \Rightarrow x^2 = 4\,py \Rightarrow x^2 = (4)(4)y \Rightarrow x^2 = 16y$$

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر دليل القطع المكافيء بالنقطة $(3\,,-5)$.

الحل : يوجد احتمالين للمعادلة القياسية للقطع المكافيء لعدم تحديد البؤرة ، والاحتمالين هما :

أولاً : البؤرة تنتمي لمحور الصادات الموجب	ثانيا : البؤرة تنتمي لمحور السينات السالب
$x^2 = 4py$ المعادلة القياسية للقطع المكافيء $y = -5 \Rightarrow p = 5 \Rightarrow F(0\,,5)$ $x^2 = 4\,(5)y$ $x^2 = 20y$ معادلة القطع المكافيء	$y^2 = -4px$ المعادلة القياسية للقطع المكافيء $x = 3 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow F(-3\,,0)$ $y^2 = -4(3)x$ $y^2 = -12x$ معادلة القطع المكافيء

سادسا : اذا مر الدليل بنقطتين مختلفتين فإن معادلة الدليل هي $(y=)$ or $(x=)$ either المسقط المتساوي من النقطتين فنقوم باستخراج احداثي قيمة p ثم تكتب المعادلة المناسبة ثم التعويض بها .

مثال : جد معادلة القطع المكافئ في الحالات التالية:

١- دليله يمر بالنقطتين $(-3\,,1)$ $(-3\,,9)$ ورأسه نقطة الاصل :

الحل : معادلة الدليل هي $x=-3$ أي أن $p=3$

$$F(3\,,0) \Rightarrow y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4(3)x \Rightarrow y^2 = 12x$$

٢- دليله يمر بالنقطتين $(-4\,,2),(-7\,,2)$ ورأسه نقطة الاصل :

الحل : معادلة الدليل هي $y=2$ أي أن $p=2$

$$F(0\,,-2) \Rightarrow x^2 = -4py \Rightarrow x^2 = -4(2)x \Rightarrow x^2 = -8y$$

سابعا : اذا مر الدليل بنقطة تقع على احد المحورين الاحداثيين فإن البؤرة تقع على نفس المحور بالاتجاه الاخر .

مثال : جد معادلة القطع المكافئ في الحالات الاتية :

١- دليله يمر بالنقطة $(-4\,,0)$ ورأسه نقطة الاصل :

الحل : بما ان الدليل يمر بالنقطة $(-4\,,0)$ فهذا يعني أن البؤرة $(4\,,0)$ اي ان $p=4$

$$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4\,(4)x \Rightarrow y^2 = 16x$$

٢- دليله يمر بنقطة تقاطع $2x+3y=12$ مع محور الصادات ورأسه نقطة الاصل :

الحل :

$$x=0 \text{ عندما } \Rightarrow 2(0)+3y=12 \Rightarrow 3y=12 \Rightarrow y=4$$

$$F(0,-4) \Rightarrow p=4 \Rightarrow x^2=-4py \Rightarrow x^2=-4\,(4)y \Rightarrow x^2=-16y$$

مثال : باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ اذا علم ان بؤرته $(\sqrt{3}\,,0)$ ورأسه في نقطة الاصل .

الحل : البؤرة $F(\sqrt{3}\,,0)$ ولتكن النقطة $M(x\,,y)$ نقطة تنتمي الى منحني القطع المكافئ ولتكن النقطة $Q(-\sqrt{3}\,,y)$ هي نقطة تقاطع العمود المرسوم من M على الدليل $\overleftrightarrow{D}$ فمن تعريف القطع المكافئ

$MF = MQ$ تعريف القطع المكافئ

$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+\sqrt{3})^2+(y-y)^2} \quad \text{بالتربيع}$$

$$(x-\sqrt{3})^2+(y)^2=(x+\sqrt{3})^2$$

$$x^2-2\sqrt{3}x+3+y^2=x^2+2\sqrt{3}x+3$$

$y^2=4\sqrt{3}x$ معادلة القطع المكافئ

مثال : جد البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ $3x^2-24y=0$

الحل :

$\because\ 3x^2-24y=0 \Rightarrow 3x^2=24y$ (نقسم طرفي المعادلة على 3)

$x^2=8y$

$x^2 = 4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$4p = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{4} = 2$

$F\,(0\,,p) = F\,(0\,,2)$ البؤرة

$y = -p \Rightarrow y = -2$ معادلة الدليل

مثال : جد البؤرة والدليل للقطع المكافئ : $3y^2 = 16x - y^2$

الحل :

$3y^2 + y^2 = 16x$

$4y^2 = 16x$ نقسم على (4)

$y^2 = 4\,x$

$y^2 = 4\,px \Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = \frac{4}{4} = 1$

البؤرة هي $F\,(1\,,0)$ ومعادلة الدليل $x = -1$

مثال : اذا كانت $x^2 - 2ky = 0$ تمثل معادلة قطع مكافئ بؤرته $(0\,,1)$ فجد قيمة (k) .

الحل : البؤرة $(0\,,1)$ صادية موجبة فتكون معادلة القطع هي : $x^2 = 4\,py$

$p = 1 \Rightarrow x^2 = 4\,y$

$x^2 = 4\,y$

$x^2 = 2ky$

$2k = 4 \Rightarrow k = 2$

مثال : جد قيمة a من معادلة القطع المكافئ $\frac{1}{4}y^2 = ax$ رأسه نقطة الاصل ويمر دليله بالنقطة $(-6\,,3)$.

الحل :

$\frac{1}{4}y^2 = ax \Rightarrow y^2 = 4ax$ معادلة قطع مكافئ بؤرته تقع على محور السينات

$\because (-6\,,3)$ الدليل يمر بالنقطة $\Rightarrow x = -6$ معادلة الدليل $p = 6$

$y^2 = 4px$

$\underline{y^2 = 4ax}$

$4a = 4p \Rightarrow a = p \Rightarrow a = 6$

ملاحظات :

متساويان

1) اذا كان القطع المكافئ يمر بالنقطتين $(x_1, y_1)\,,(x_1, -y_1)$ فالبؤرة سينية .

2) اذا كان القطع المكافئ يمر بالنقطتين $(x_1, y_1)\,,(-x_1, y_1)$ فالبؤرة صادية .

متساويان

واجب : اذا كانت $y^2 - 4kx = 0$ تمثل معادلة قطع مكافئ بؤرته $(-2\,,0)$ فجد قيمة (k) .

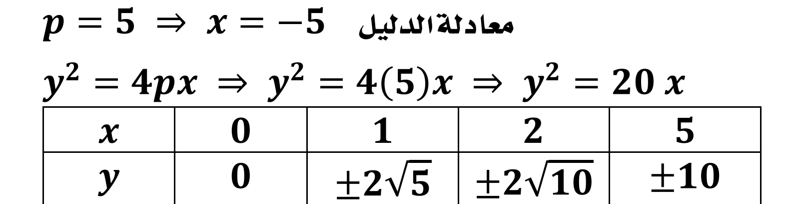
واجب : جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2, 1)\,,(-2, 1)$ والرأس في نقطة الاصل .

حل تمارين (1 - 2)

س1/ جد المعادلة للقطع المكافئ في كل مما يأتي ثم أرسم المنحني البياني لها :

أ) البؤرة $(5\,,0)$ والرأس نقطة الاصل

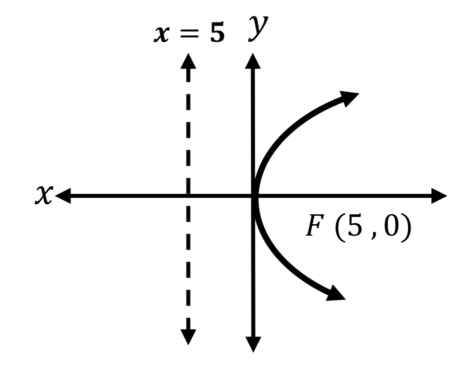
الحل : البؤرة $(5\,,0)$ سينية موجبة (الفتحة نحو اليمين) :



معادلة الدليل $p = 5 \Rightarrow x = -5$

$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4(5)x \Rightarrow y^2 = 20\,x$

x	0	1	2	5
y	0	$\pm 2\sqrt{5}$	$\pm 2\sqrt{10}$	± 10



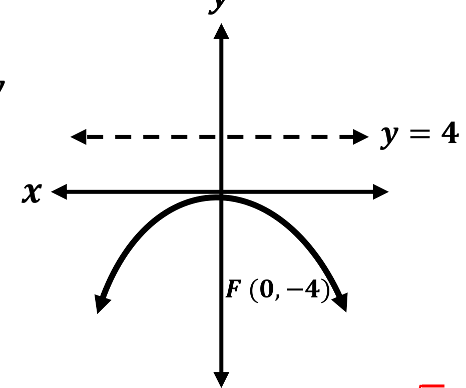
ب) البؤرة $(0\,,-4)$ والرأس في نقطة الاصل

الحل : البؤرة $(0\,,-4)$ صادية سالبة (الفتحة نحو الاسفل)

معادلة الدليل $p = 4 \Rightarrow y = 4$

$x^2 = -4py \Rightarrow x^2 = -4(4)y \Rightarrow x^2 = -16\,y$

x	0	± 4	$\pm 4\sqrt{2}$
y	0	-1	-2



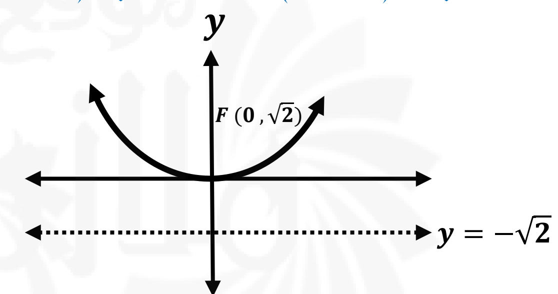
ج) البؤرة $(0\,,\sqrt{2})$ والرأس نقطة الاصل

الحل : البؤرة $(0\,,\sqrt{2})$ صادية موجبة (الفتحة نحو الأعلى) :

معادلة الدليل $p = \sqrt{2} \Rightarrow y = -\sqrt{2}$

$x^2 = 4py \Rightarrow x^2 = 4\sqrt{2}\,y$

x	0	$\pm 2\sqrt{\sqrt{2}}$	$\pm 2\sqrt{2}$
y	0	1	$\sqrt{2}$



د) معادلة دليل القطع المكافئ $4y - 3 = 0$ والرأس في نقطة الاصل

الحل :

معادلة الدليل $4y - 3 = 0 \Rightarrow 4y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{4}$

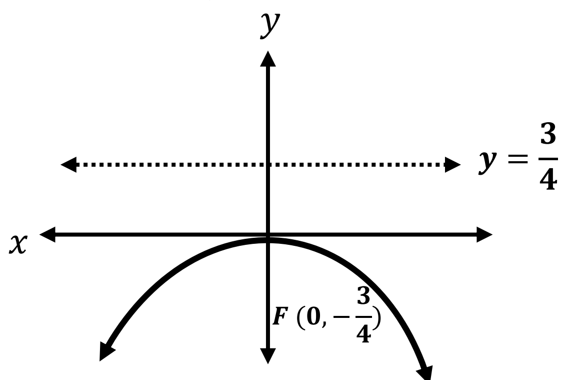
البؤرة $y = p \Rightarrow p = \frac{3}{4} \Rightarrow F\left(0\,,-\frac{3}{4}\right)$

نلاحظ بأن البؤرة صادية سالبة (الفتحة نحو الاسفل) :

$$x^2 = -4py \Rightarrow x^2 = -4(\frac{3}{4})\, y$$

$$\Rightarrow x^2 = -3\, y$$

x	0	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{6}$
y	0	-1	-2



س2/ في كل مما يأتي جد البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل والقطع المكافئ :

1) $x^2 = 4y$

الحل :

$(x-0)^2 = 4(y-0)$ الفتحة نحو الاعلى

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$h = 0 \ , \quad k = 0 \ , 4p = 4 \ \Rightarrow p = 1$

$F\,(0\,,p) = F\,(0\,,1)$ البؤرة

$V\,(h\,,k) = V\,(0\,,0)$ الرأس

$x = 0$ معادلة المحور $y = -1$ معادلة الدليل

2) $2x + 16y^2 = 0$

الحل :

$16y^2 = -2x \Rightarrow y^2 = \frac{-1}{8}\,x \Rightarrow (y-0)^2 = \frac{-1}{8}(x-0)$ الفتحة نحو اليسار

$(y-k)^2 = -4p(x-h)$

$h = 0 \quad , \quad k = 0 \quad , \quad 4p = \frac{1}{8} \Rightarrow p = \frac{1}{32}$

$F\,(-p\,,0) = F\left(-\frac{1}{32}\,,0\right)$ البؤرة

$V\,(h\,,k) = V\,(0\,,0)$ الرأس

$y = 0$ معادلة المحور $x = \frac{1}{32}$ معادلة الدليل

س3/ جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2\,,-5)$ ، $(2\,,5)$ والرأس في نقطة الاصل .

الحل : نلاحظ بأن الاحداثي السيني في النقطتين متساويين وموجبين فتكون المعادلة (سينية موجبة) :

$y^2 = 4px$ النقطتان تحققان المعادلة

$$25 = 4p\,(2) \Rightarrow 25 = 8\,p \Rightarrow p = \frac{25}{8}$$

$y^2 = 4\left(\frac{25}{8}\right)x \Rightarrow y^2 = \left(\frac{25}{2}\right)x$ المعادلة هي

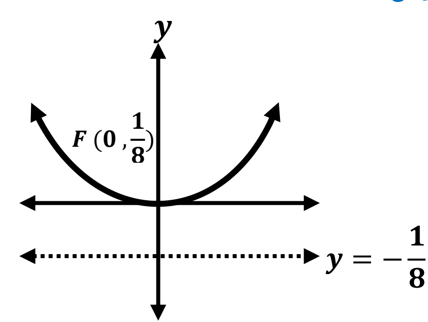
س4/ اذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(4\,,-3)$ والرأس في نقطة الاصل جد معادلة القطع المكافئ علما أن بؤرته تنتمي لأحد المحورين .

الحل : البؤرة تنتمي لأحد المحورين اي أن هنالك أحتمالان :

البؤرة سينية	البؤرة صادية
$\because x = -3 \Rightarrow p = 3$ معادلة الدليل $\because\ y^2 = 4px \Rightarrow\ y^2 = 4(3)x$ $\Rightarrow\ y^2 = 12x$	$y = 4 \Rightarrow p = 4$ معادلة الدليل $x^2 = -4py \Rightarrow\ x^2 = -4(4)y$ $\Rightarrow\ x^2 = -16y$

س5/ قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ ويمر بالنقطة $(1\,,2)$ جد قيمة A ثم جد بؤرته ودليله ثم ارسم القطع .

الحل :



نلاحظ بأن البؤرة صادية موجبة (الفتحة نحو الاعلى)

$(1,2)$ تنتمي للقطع المكافئ فهي تحقق معادلته

$A(1)^2 + 8(2) = 0 \Rightarrow A = -16$

$-16\,x^2 + 8y = 0 \Rightarrow -16\,x^2 = -8y$

$x^2 = \frac{1}{2}\,y$

$x^2 = 4py$

$4p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{8}$

$F\,(0\,,p) \Rightarrow F\,(0\,,\frac{1}{8})$ البؤرة

$y = -\frac{1}{8}$ معادلة الدليل

x	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	± 1
y	0	1	2

س 6/ باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ :

١- البؤرة $(7\,,0)$ والرأس في نقطة الاصل :

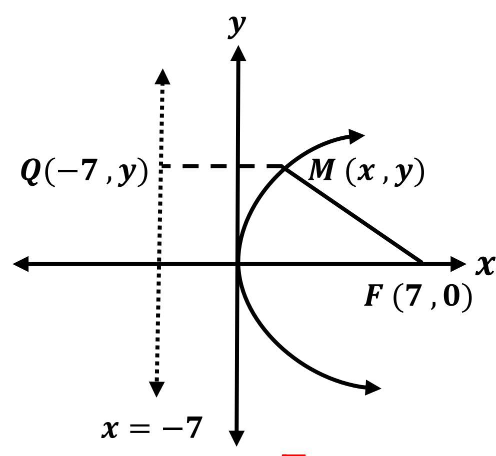
الحل :

$p = 7 \Rightarrow x = -7$ معادلة الدليل

$MF = MQ$ تعريف القطع المكافئ

$\sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+7)^2 + (y-y)^2}$ بتربيع الطرفين

$$(x-7)^2+(y-0)^2=(x+7)^2$$
$$x^2-14x+49+y^2=x^2+14x+49$$
$$-14x+y^2=14x$$
$$\boxed{y^2=28x}$$ معادلة القطع المكافئ



٢- معادلة الدليل $y=\sqrt{3}$ والرأس في نقطة الاصل

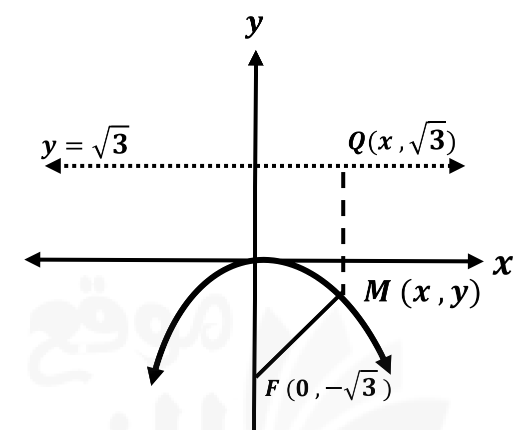
$y=\sqrt{3}$, $y=p \Rightarrow y=\sqrt{3}$

$\therefore\ F(0,-p)=F\left(0,-\sqrt{3}\right)$ البؤرة

$MF=MQ$ تعريف القطع المكافئ

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{(x-x)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2}$$ بتربيع الطرفين

$$x^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2=\left(y-\sqrt{3}\right)^2$$
$$x^2+y^2+2\sqrt{3}y+3=y^2-2\sqrt{3}y+3$$
$$x^2+2\sqrt{3}y=-2\sqrt{3}y$$
$$\boxed{x^2=-4\sqrt{3}y}$$ معادلة القطع المكافئ



أمثلة إضافية محلولة

مثال : النقط $(-12,-6),(4,-6),(0,0)$ تنتمي للقطع المكافئ $y=ax^2+bx+c$ جد احداثي البؤرة ومعادلة الدليل والرأس والبعد البؤري .

الحل : $\because$ النقطة $(0,0)\in$ للقطع المكافئ لذا فهي تحقق معادلته $y=ax^2+bx+c$

$$0=0+0+c \Rightarrow c=0$$

$\because$ النقطة $(4,-6)\in$ للقطع المكافئ لذا فهي تحقق معادلته

$$-6=16a+4b+0\,]\ \div 2 \Rightarrow 8a+2b=-3 \dots\dots (1)$$

$\because$ النقطة $(-12,-6)\in$ للقطع المكافئ لذا فهي تحقق معادلته

$-6 = 144a - 12b + 0] \div 6 \quad \Rightarrow 24a - 2b = -1 \ldots\ldots (2)$

نحل المعادلتين حلاً آنيا فنحصل على :

$8a + 2b = -3 \quad \ldots\ldots (1)$

$\underline{24a - 2b = -1 \ \ldots\ldots (2)}$

$32a = \ -4 \ \Rightarrow a = \dfrac{-1}{8}$ نعوض في (1)

$8\left(\dfrac{-1}{8}\right) + 2b = -3 \ \Rightarrow -1 + 2b = -3 \ \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1$

$\therefore y = \frac{-1}{8}x^2 - x \ \Rightarrow 8y = -x^2 - 8x \ \Rightarrow \ x^2 + 8x = -8y$ معادلة القطع المكافئ

باضافة (16) الى طرفي معادلة القطع المكافئ حتى تكون حدود (x) بشكل مربع كامل $(\frac{8}{2})^2 = (4)^2 = 16$

$x^2 + 8x + 16 = -8y + 16 \ \Rightarrow \ (x+4)^2 = -8y + 16 \ \Rightarrow \ (x+4)^2 = -8(y-2)$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(x-h)^2 = -4p(y-k)$ نحصل على

$h = -4 \quad , \ k = 2 \ \Rightarrow \bar{V}(h\,,k) = \bar{V}(-4\,,2)$ الرأس

$\because \ -4p = -8 \ \Rightarrow p = 2 \ \Rightarrow F(h\,,-p+k) = F\,(-4\,,-2+2) = F(-4\,,0)$ البؤرة

$\because x = h \ \Rightarrow x = -4$ معادلة المحور

$\because y = p + k \ \Rightarrow y = 2 + 2 \ \Rightarrow y = 4$ معادلة الدليل

$\therefore$ البعد البؤري $= 4p = 4(2) = 8$

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويحقق الشروط التالية :

١) بؤرته $(5\,,0)$

الحل : $\because$ البؤرة تنتمي لمحور السينات $x - axis \Leftarrow$ معادلة القطع المكافئ هي $y^2 = 4px$

$\because \ (p\,,0) = (5\,,0) \Rightarrow p = 5 \quad \therefore \ \ y^2 = 4(5)x \ \Rightarrow \ y^2 = 20x \ \ \forall\, x > 0$

٢) بؤرته $(0\,,3)$

الحل : $\because$ البؤرة تنتمي لمحور الصادات $y - axis \Leftarrow$ معادلة القطع المكافئ هي $x^2 = 4py$

$\because \ (0\,,p) = (0\,,3) \Rightarrow p = 3 \quad \therefore \ \ x^2 = 4(3)x \ \Rightarrow \ x^2 = 12x \ \ \forall\, y > 0$

٣) معادلة دليله $2y - 6 = 0$

الحل :

$\because 2y - 6 = 0 \ \Rightarrow 2y = 6 \ \Rightarrow y = 3 \ \ \Rightarrow p = -3 \ \ \Rightarrow F(0\,,-3)$ البؤرة

$\therefore x^2 = -4py$

$x^2 = -4(-3)y \Rightarrow x^2 = 12y$ معادلة القطع المكافئ

٤) بؤرته تنتمي لمحور الصادات ويمر بالنقطة $\left(\sqrt{2}\,,\frac{1}{2}\right)$

الحل : ∵ البؤرة تنتمي لمحور الصادات $y-axis \Leftarrow$ معادلة القطع المكافئ هي $x^2=4py$

∵ النقطة $\left(\sqrt{2}\,,\frac{1}{2}\right)$ تنتمي للقطع فهي تحقق معادلته

$$\left(\sqrt{2}\right)^2=4p\,\frac{1}{2}\Rightarrow 2=2p\Rightarrow p=1$$

$\because\ x^2=4py\Rightarrow x^2=4(1)y\Rightarrow x^2=4y$ معادلة القطع المكافئ

٥) يمر بالنقطتين $(1\,,-\sqrt{5}),(1\,,2\sqrt{5})$ جد معادلته ومعادلة دليله .

الحل : ∵ النقطتين متناظرتان حول محور السينات (لأن قيمة x ثابتة لم تتغير) معادلته هي $y^2=4px$

∴ نعوض أحدى النقطتين لأنه يمر بها

$(2\sqrt{5})^2=4p\,(1)\Rightarrow 20=4p\Rightarrow p=5\Rightarrow x=-5$ معادلة الدليل

$\because\ y^2=4px=4(5)x\Rightarrow y^2=20x$ معادلة القطع المكافئ

٦) بؤرته تنتمي لمحور السينات ودليله يمر بالنقطة $(2\,,-4)$

الحل : ∵ البؤرة تنتمي لمحور السينات فإن معادلة القطع المكافئ هي $y^2=-4px$

∵ دليله يمر بالنقطة $(2\,,-4)$ لذا فإن $x=2$ هي معادلة القطع الدليل لأن الدليل يقطع الاحداثي السيني $p=-2$

$p=-2\Rightarrow y^2=-4px\Rightarrow y^2=-4(-2)x\Rightarrow y^2=8x$ معادلة القطع المكافئ

٧) رأسه نقطة الاصل وبؤرته مركز الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2-4y+1=0$

الحل : مركز الدائرة $=\left(\frac{(\text{معامل } -x)}{2}\,,\frac{(\text{معامل } -y)}{2}\right)=\left(\frac{0}{2}\,,\frac{-(-4)}{2}\right)=(0\,,2)=$ البؤرة

∴ $p=2$ والبؤرة تنتمي لمحور الصادات ومعادلة القطع المكافئ هي $x^2=4py$

$x^2=4py\Rightarrow x^2=4(2)y\Rightarrow x^2=8y$ معادلة القطع المكافئ

٨) دليله يوازي المحور الصادي ومعادلة محوره $y=0$ ويمر بالنقطة $(-2\,,1)$

الحل : ∵ الدليل يوازي المحور الصادي ويمر بالنقطة $(-2\,,1)$

∴ الدليل يقطع الاحداثي السيني السالب والبؤرة تقع على الاحداثي السيني الموجب

∴ معادلة القطع المكافئ هي $y^2=4px$

∵ القطع يمر بالنقطة $(-2\,,1)$ لذا فهي تحققه

$$\because\ y^2=4px\Rightarrow (1)^2=4p(-2)\Rightarrow 1=-8p\Rightarrow p=\frac{-1}{8}$$

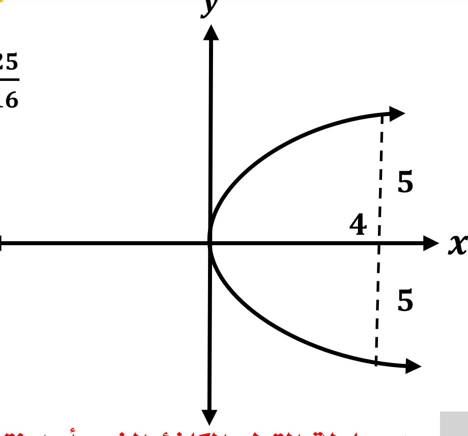
$\therefore\ y^2=4(\frac{-1}{8})x\Rightarrow y^2=\frac{-1}{2}x$ معادلة القطع المكافئ

٩) يقطع من المستقيم $x=4$ قطعة طولها (10) وحدات

الحل :

$\because 2\,y=10\Rightarrow y=5\Rightarrow (4\,,5)(4\,,-5)$ رأسي القطع المكافئ

∵ التناظر حول محور السينات $\Leftarrow$ معادلة القطع المكافئ $y^2=4px$ والنقطة $(4\,,5)$ تحققه



$y^2 = 4px \Rightarrow (5)^2 = 4p(4) \Rightarrow 25 = 16p \Rightarrow p = \frac{25}{16}$

$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4(\frac{25}{16})x \Rightarrow y^2 = (\frac{25}{4})x$

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويحقق الشروط التالية :

١- بؤرته الصيغة الديكارتية للعدد $z = \frac{-4+2i}{2-i}$

الحل :

$z = \frac{-4+2i}{2-i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{-8-4i+4i-2}{5} = \frac{-10}{5} = -2 \Rightarrow (-2\,,0)$ الصيغة الديكارتية

$\therefore (-2\,,0) = (p\,,0)$ البؤرة $\Rightarrow p = -2$

$\therefore y^2 = 4px = 4(-2)x \Rightarrow y^2 = -8x$ معادلة القطع المكافئ

٢- بؤرته تنتمي لأحد المحورين ودليله يمر بالنقطة $(3\,,4)$

الحل : $\because$ الدليل يمر بالنقطة $(3\,,4)$ ولم يحدد لأي المحورين يوازي $\Leftarrow$ يوجد دليلان $p = 4\,, p = 3$

$\therefore$ يوجد بؤرتان الثانية $(0\,,-4)$ الأولى $(-3\,,0)$ مما يعني قطعان مكافئان

$\therefore y^2 = -4px = -4\,(3)x \Rightarrow y^2 = -12x$ معادلة القطع المكافئ الأول

$\therefore x^2 = -4py = -4\,(4)y \Rightarrow x^2 = -16y$ معادلة القطع المكافئ الثاني

٣- يمر برؤوس المثلث ABC حيث $A(0\,,0), B\,(-2\,,4), C\,(2\,,m)$ ثم أوجد قيمة m .

الحل : $\because$ النقطة $(2\,,m)$ تقع أما في الربع الأول أو الرابع

النقطة $(2\,,m) \in$ للربع الأول لكي يتحقق القطع ، لأنه لو كانت في الربع الرابع أصبح خطا مستقيما

البؤرة تقع على المحور الصادي والقانون $x^2 = 4py$

$\because$ القطع يمر بالنقطة $(-2\,,4)$ فهي تحققه

$\therefore (-2)^2 = 4p(4) \Rightarrow 4 = 16\,p \Rightarrow p = \frac{4}{16} \Rightarrow p = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = 4py = 4\left(\frac{1}{4}\right)y \Rightarrow x^2 = y$

$\because$ النقطة $(2\,,m)$ تقع على القطع لذا فهي تحقق معادلة القطع

$\therefore (2)^2 = m \Rightarrow m = 4$

٤- رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله $2y + \sqrt{3} = 0$

$2y + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2y = -\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\because x^2 = 4py = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y \Rightarrow x^2 = 2\sqrt{3}y$ معادلة القطع المكافئ

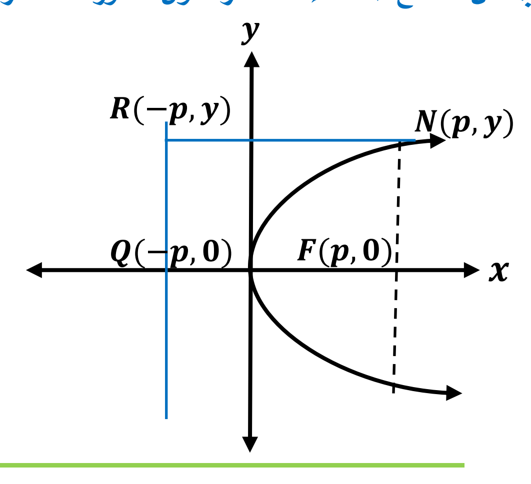
مثال : أثبت أن طول الوتر العمود على محور القطع المكافـئ عند البؤرة يساوي $4p$.

الحل :

$NR = \sqrt{(p+p)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(2p)^2} = \sqrt{4p^2} = 2p$

$NR = NF \Rightarrow NF = 2p$

بما ان القطع المكافىء متناظر حول محور التناظر (السيني أو الصادي) فإن $NF = FZ \Longrightarrow NZ = 4p$



واجبات

س١/ اذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(5\,,-2)$ والرأس في نقطة الأصل فجد معادلته علما ان بؤرته تنتمي لأحد المحورين .

س٢/ في كل مما يأتي جد معادلة القطع المكافئ الذي :

١. بؤرته $(0\,,-7)$ والرأس في نقطة الاصل .

٢. معادلة الدليل له $2x - 3 = 0$ والرأس في نقطة الأصل .

٣. بؤرته تنتمي لمحور السينات ويمر بالنقطة $(6\,,3)$ والرأس في نقطة الاصل .

٤. بؤرته تنتمي لمحور السينات ودليله يمر بالنقطة $(5\,,-4)$ والرأس في نقطة الأصل .

٥. معادلة الدليل له $2y + \sqrt{3} = 0$ والرأس في نقطة الأصل .

س٣/ باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي :

1) بؤرته $(0\,,4)$ والرأس في نقطة الأصل .

2) معادلة الدليل $y - 5 = 0$ والرأس في نقطة الأصل .

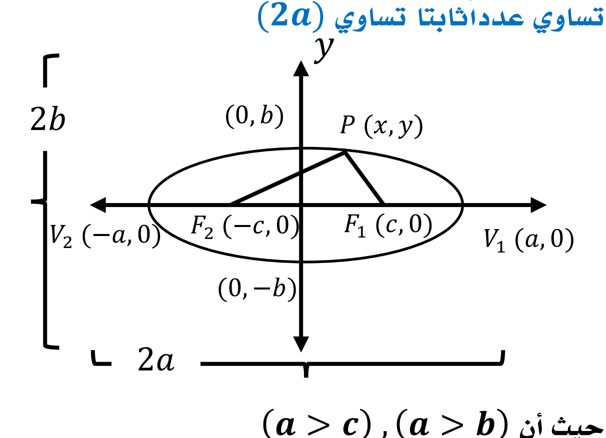
القطع الناقص Ellipse

القطع الناقص : هو مجموعة من النقط في المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان (البؤرتان) تساوي عدداً ثابتا تساوي $(2a)$

$\because PF_1 + PF_2 = 2a$

البؤرتان على المحور السيني والمركز نقطة الاصل $O\ (0\ ,0)$

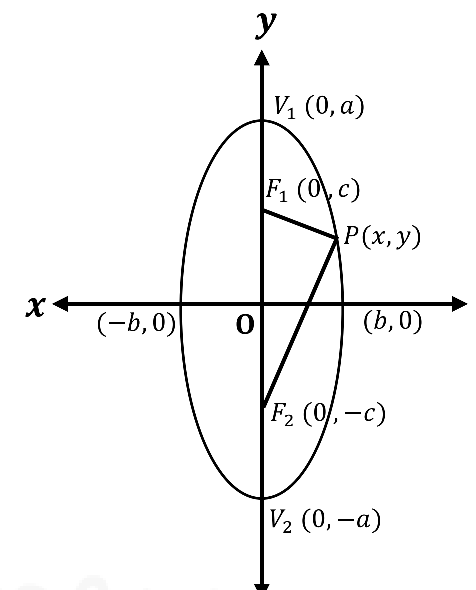
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



حيث أن $(a > b)\ ,(a > c)$

البؤرتان على المحور الصادي والمركز نقطة الاصل $O\ (0\ ,0)$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



اذا وقع المحور الكبير عن محور السينات فإن البؤرتان والرأسان هما على محور السينات .

جدول يبين مفردات القطع الناقص في الحالتين

القطع الناقص	البؤرتان	الرأسان	القطبان	المعادلة
(أفقي)	$F_1(c,0)$ $F_2\ (-c,0)$	$V_1(a,0)$ $V_2\ (-a,0)$	$(0,b)$ $(0,-b)$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
(عمودي)	$F_1(0,c)$ $F_2(0,-c)$	$V_1(0,a)$ $V_2\ (0,-a)$	$(b,0)$ $(-b,0)$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

خواص القطع الناقص :

1) $a\ > b\ ,c$ حيث ان $(a\ ,b\ ,c > 0)$

2) $\Leftarrow a\ > b\ ,c$ $\quad a^2 = b^2 + c^2 \quad \Leftarrow \quad c^2 = a^2 - b^2$

3) طول المحور الكبير $= 2a$ (العدد الثابت)

4) طول المحور الصغير $= 2b$

5) المسافة بين البؤرتين $= 2c$ (البعد البؤري)

6) مساحة القطع الناقص : ($A = ab\pi$ وحدة مربعة)

7) محيط القطع الناقص : ($P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ حيث $\pi = \frac{22}{7}$)

8) الاختلاف المركزي: $(0 < e < 1)$ ، $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1$ اي ان $c = \sqrt{a^2-b^2}$

9) النسبة بين طولي محوريه $= \frac{2a}{2b}$

10) اذا مر القطع بنقطة أحد احداثياتها صفر فالاحداثي الثاني هو أما (a) أو (b) والاكبر هو (a) والاصغر هو (b) .

ملاحظات :

1) اذا كان مقام الـ (x^2) أكبر فالبؤرتان سينيتان وتكون المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

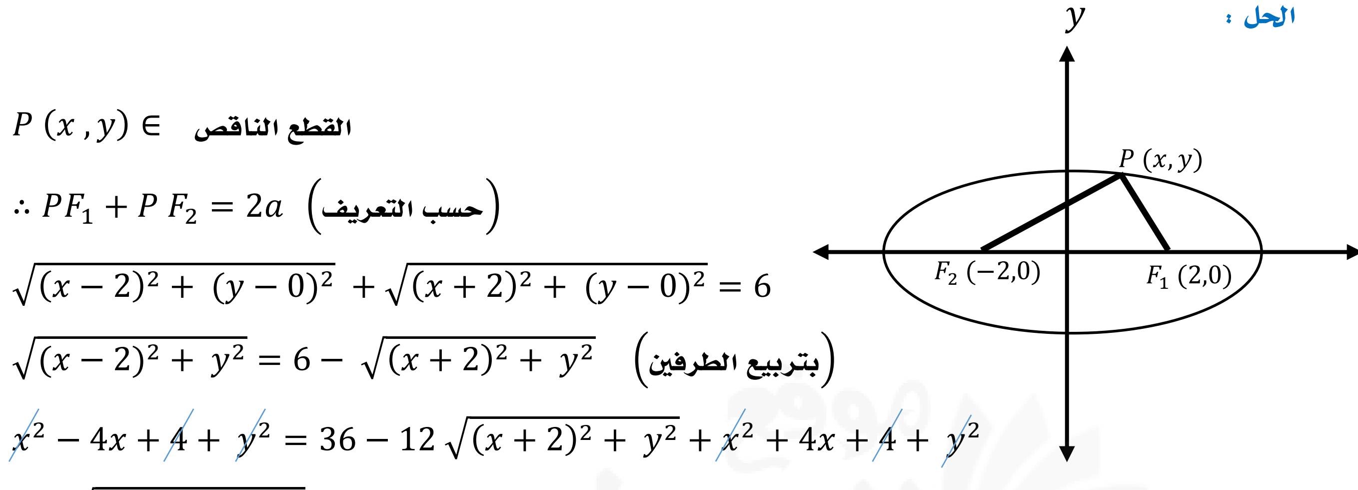
2) اذا كان مقام الـ (y^2) أكبر فالبؤرتان صاديتان وتكون المعادلة القياسية $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

3) الطرف الايمن في معادلة القطع الناقص دائما $= 1$.

4) كل نقطة تنتمي الى القطع الناقص تحقق معادلة القطع .

مثال : باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(2,0)$, $F_2(-2,0)$ والعدد الثابت (6) .

الحل :



$P(x, y) \in$ القطع الناقص

$\therefore PF_1 + PF_2 = 2a$ (حسب التعريف)

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} = 6$

$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$ (بتربيع الطرفين)

$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + x^2 + 4x + 4 + y^2$

$[12\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 36 + 8x\ ] \div 4$

$3\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 9 + 2x$ (بتربيع الطرفين)

$9(x^2 + 4x + 4 + y^2) = 81 + 36x + 4x^2$

$9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 = 81 + 36x + 4x^2$

$5x^2 + 9y^2 = 45 \quad] \div 45$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ معادلة القطع الناقص

القطع الناقص
$pF_1 + pF_2 = 2a$ كمية ثابتة باستخدام قانون
$\sqrt{\text{المسافة بين نقطة وبؤرته الاولى}} + \sqrt{\text{المسافة بين نفس النقطة وبؤرته الثانية}} = 2a$ انتبه الجذر لا يرفع كاملا

مثال : في كل مما يأتي جد طول كل من المحورين وإحداثيات كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

2) $4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$

الحل :

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow \therefore V_1(5,0)\ , V_2(-5,0)$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3$

$\therefore F_1(3,0)\ , F_2(-3,0)$ البؤرتان

$\therefore a = 5 \Rightarrow 2a = 10$ طول المحور الكبير

$\therefore b = 4 \Rightarrow 2b = 8$ طول المحور الصغير

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} < 1$ الاختلاف المركزي

2) $4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$

$4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3} \quad \left(\times \frac{3}{4}\right)$

$\frac{12x^2}{4} + \frac{9y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{12}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1$

$a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{2}{3} \quad , \quad b^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} \Rightarrow c^2 = \frac{4-3}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

$2a = 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$ طول المحور الكبير

$2b = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ طول المحور الصغير

$\therefore V_1\left(0, \frac{2}{3}\right)\ , \ V_2\left(0, \frac{-2}{3}\right)$ الرأسان , $F_1\left(0, \frac{1}{3}\right)\ , \ F_2\left(0, \frac{-1}{3}\right)$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2} < 1$ الاختلاف المركزي

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(3,0)\ ,F_2(-3,0)$ ورأساه $V_1(5,0)\ ,V_2(-5,0)$ ومركزه نقطة الاصل .

الحل : ∴ البؤرتان والرأسان يقعان على المحور السيني فإن معادلة القطع الناقص

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$c=3 \Rightarrow c^2=9 \qquad a=5 \Rightarrow a^2=25$$

$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 9=25-b^2 \Rightarrow b^2=25-9=16 \qquad \therefore b=4$$

$$\therefore \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

مثال : جد طول كل من المحورين وإحداثي كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي والمحيط والمساحة لمعادلة القطع الناقص $16x^2+25y^2=400$

الحل :

$$16x^2+25y^2=400\,]\ \div 400 \Longrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

(طول المحور الكبير) $a^2=25 \Rightarrow a=5 \Rightarrow 2a=10$

(طول المحور الصغير) $b^2=16 \Rightarrow b=4 \Rightarrow 2b=8$

$$c^2=a^2-b^2=25-16=9 \Rightarrow c=3$$

البؤرتان $F_1(3,0)\ ,\ F_2(-3,0)$

الرأسان $V_1(5,0)\ ,V_2(-5,0)$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$

$A=ab\pi=(5)(4)\pi=20\pi$ وحدة مربعة

$P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{25+16}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{41}{2}}$ وحدة

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءا طوله (8) وحدات ومن محور الصادات جزءا طوله (12) وحدة ثم جد المسافة بين بؤرتيه ومساحة منطقته ومحيطه وأختلافه المركزي .

الحل : ما يقطعه من الصادات أكبر مما يقطعه من السينات فالبؤرتان صاديتان

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$2a=12 \Rightarrow a=6 \Rightarrow a^2=36$$

$$2b=8 \Rightarrow b=4 \Rightarrow b^2=16$$

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$ (معادلة القطع)

$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 16 = 20 \quad \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$

$2c = 4\sqrt{5}$ (المسافة بين البؤرتين)

المساحة $A = ab\pi = 24\pi$ وحدة مربعة

المحيط $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{52}{2}} = 2\pi\sqrt{26}$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

ملاحظة : نقاط تقاطع القطع مع المحورين $(x, 0), (0, y)$ تمثل الرؤوس والاقطاب والأبعد الى المركز هو الرأس.

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(0, 3), (-4, 0)$ ثم جد مساحته ومحيطه .

الحل :

$a = 4 \quad , \quad b = 3 \quad \therefore \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1}$

$A = ab\pi = (4)(3)\pi = 12\pi$ وحدة مربعة

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{16+9}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25}{2}} = 5\sqrt{2}\pi$$

مثال : جد معادلة القطع الناقص إحدى بؤرتيه $(4, 0)$ وإختلافه المركزي $\left(\frac{1}{2}\right)$.

الحل : البؤرة سينية فالمعادلة هي $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

$c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$

$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2c \Rightarrow a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$

$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 64 - 16 = 48$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1}$

مثال : جد معادلة القطع الناقص إحدى بؤرتيه $(0, -3)$ والنسبة بين طولي محوريه $\left(\frac{4}{5}\right)$

الحل : البؤرة صادية فالمعادلة هي $\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$

$c = -3 \Rightarrow c^2 = 9$

$\frac{\text{طول المحور الصغير}}{\text{طول المحور الكبير}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{2b}{2a} = \frac{4}{5} \Rightarrow b = \frac{4a}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{4a}{5}\right)^2 + 9$

$a^2 - \frac{16a^2}{25} = 9 \quad] \times 25$

$25a^2 - 16a^2 = 225$

$9a^2 = 225 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow \boxed{a = 5}$

نعوض قيمة (a) في معادلة (1)

$b = \frac{4(5)}{5} = 4 \Rightarrow b^2 = 16$ معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1}$

مثال : لتكن $kx^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وإحدى بؤرتيه $(\sqrt{3}, 0)$ جد قيمة (k).

الحل : نقسم طرفي المعادلة على (36) وزاري ٢٠١٥ / د١

$$\frac{kx^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

البؤرة سينية معادلة القطع :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{36}{k} \quad , \quad b^2 = 9 \quad , \quad c = \sqrt{3}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 3 = \frac{36}{k} - 9 \Rightarrow \frac{36}{k} = 3 + 9 \Rightarrow \frac{36}{k} = 12 \Rightarrow k = \frac{36}{12} = 3$$

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين البؤرتين (6) وحدات ، والفرق بين طولي المحورين يساوي (2) وحدة .

الحل : $2c = 6 \Rightarrow c = 3$

الفرق بين طولي المحورين $2a - 2b = 2$ (بالقسمة على 2) $\Leftarrow a - b = 1 \Leftarrow a = b + 1$ (نبدأ بتعويض عن a)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(b+1)^2 = b^2 + 9$$

$$b^2 + 2b + 1 = b^2 + 9 \Rightarrow 2b + 1 = 9 \Rightarrow 2b = 9 - 1 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow a = 4 + 1$$

$a = 5 \Rightarrow a^2 = 25$ معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات .

الحل :

من القطع المكافئ :

$$y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4px$$

$4p = 12 \Rightarrow p = 3 \quad F(3,0)$ البؤرة

من القطع الناقص :

$2b = 10 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$ طول المحور الصغير

$F_1(3,0), \quad F_2(-3,0)$ البؤرتان $\Rightarrow c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 9 \Rightarrow a^2 = 34$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحد رأسيه هو بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 20x$ والنسبة بين طول محوره الصغير والبعد بين البؤرتين $\frac{4}{3}$.

الحل :

القطع المكافئ :

$y^2 = 4px$
$y^2 = 20x$
$4p = 20 \Rightarrow p = 5 \Rightarrow F(5, 0)$

القطع الناقص :

$V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$ $\Rightarrow a = 5$

$\frac{2b}{2c} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3b = 4c \Rightarrow c = \frac{3\,b}{4}$
$a^2 = b^2 + c^2$
$[25 = b^2 + \frac{9b^2}{16}] \times 16$
$400 = 16b^2 + 9b^2 \Rightarrow 400 = 25b^2$
$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحد بؤرتيه $(0, 4)$ ومجموع مربعي طولي محوريه 136 .

الحل :

$(2a)^2 + (2b)^2 = 136$

$[4\,a^2 + 4\,b^2 = 136\ ] \quad \div\ 4$

$a^2 + b^2 = 34 \Rightarrow a^2 = 34 - b^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$

$c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 34 - b^2 = b^2 + 16 \Rightarrow -2b^2 = 16 - 34$

$-2b^2 = -18 \Rightarrow b^2 = \frac{-18}{-2} = 9$

$a^2 = 34 - 9 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرته نقطتان على محور السينات واحد بؤرتيه تبعد عن الرأسين بالعددين 7 , 3 .

الحل :

$2a = 7 + 3$
$2a = 10 \Rightarrow a = 5$ $\qquad V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$

$$2c = 7 - 3 = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = \pm 2 \qquad F_1(2,0),\ F_2(-2,0)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 25 - 4 \Rightarrow b^2 = 21$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$$

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بالنقطتين $(2\,,2)$ $(3\,,\frac{\sqrt{6}}{2})$.

الحل : لان البؤرة تقع على محور السينات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بتعويض النقطة $(2\,,2)$ في المعادلة العامة :

$$\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \xrightarrow{(\times a^2b^2)} 4b^2 + 4a^2 = a^2b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

بتعويض النقطة $(3\,,\frac{\sqrt{6}}{2})$ في المعادلة العامة

$$[\frac{9}{a^2} + \frac{\frac{6}{4}}{b^2} = 1] \xrightarrow{(\times a^2b^2)} 9b^2 + \frac{6}{4}a^2 = a^2b^2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$4b^2 + 4a^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\mp 9b^2 \mp \frac{6}{4}a^2 = \mp a^2b^2 \ldots\ldots (2)$$ بالطرح

$$-5b^2 + \frac{10}{4}a^2 = 0$$

$$\left[\frac{10}{4}a^2 = 5b^2\right] \xrightarrow{(\times 4)} 10a^2 = 20b^2 \Rightarrow a^2 = \frac{20b^2}{10} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$ نعوض في معادلة (1)

$$4b^2 + 4(2b^2) = (2b^2)b^2 \Rightarrow 4b^2 + 8b^2 = 2b^4 \Rightarrow 12b^2 = 2b^4 \xrightarrow{\div 2b^2} b^2 = 6$$

$$a^2 = 2\,(6) \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1}$$ معادلة القطع الناقص

ملاحظة عن السؤال التالي : القطع يمر في النقطة $(3\,,0)$ هذه النقطة تقع على احد المحاور الاحداثية حيث النقطة $(3\,,0)$ تقع على المحور الاحداثي السيني لذلك هذه النقطة تمثل اما رأس القطع او القطب ، لذلك يجب ان ننتبه الى الملاحظة وهي يجب ان تكون $a > c\ ,\ a > b$. فمعادلة القطع المكافئ معلومة (نستخرج أولا البؤرة للقطع المكافئ وستكون بؤرة للقطع الناقص) .

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحد بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ ويمر بالنقطة $(3\,,0)$.

الحل :

القطع المكافئ :

$$y^2 = -8x$$

$$y^2 = -4px$$

$$-4p = -8 \Rightarrow p = \frac{-8}{-4} \Rightarrow p = 2 \Rightarrow F(-2,0)$$

القطع الناقص :

$V_1(3,0)$, $V_2(-3,0)$, $F_1(2,0)$, $F_2(-2,0)$

$a^2 = b^2 + c^2$

$9 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 9 - 4 \Longrightarrow b^2 = 5 \implies \boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $2y^2 - 16x = 0$ ويمر بالنقطة $(0\,,-5)$.

الحل :

القطع المكافئ :

$[2y^2 - 16x = 0] \div 2$

$y^2 = 8x$

$y^2 = 4px \implies 4p = 8 \Longrightarrow p = 2 \implies F(2,0)$

القطع الناقص : لان النقطة تقع على غير محور البؤرة في القطع الناقص فهي تمثل القطبين

$(0,-5)\,,(0\,,5)$ القطبين هما $\implies b = 5 \Longrightarrow b^2 = 25$

$F_1(2,0)$, $F_2(-2,0) \Longrightarrow c = 2 \Longrightarrow c^2 = 4$

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 25 + 4 \Longrightarrow a^2 = 29 \implies \boxed{\frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{25} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والمار ببؤرة القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0$ والبعد بين بؤرتيه يساوي 6 وحدة طول .

الحل :

القطع المكافئ :

$x^2 = -12y$

$x^2 = -4py \Rightarrow -4p = -12 \Longrightarrow p = \frac{12}{4} = 3$, $F(0,-3)$

القطع الناقص :

$2c = 6 \Longrightarrow c = 3 \Longrightarrow c^2 = 9$

نلاحظ ان قيمة $c = 3$ ولا يجوز ان تكون بدل قيمة a لان a اكبر من c لذلك تعتبر $(0\,,-3)$ هي b :

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 9 \Rightarrow a^2 = 18$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies \boxed{\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بنقطتي تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع المحورين الاحداثيين .

الحل : اذا مر القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل بنقطتي تقعان في ربعين متجاورين فان الرأس يمثل النقطة ذات المطلق الاكبر (أي يجرد العدد من الاشارة) والقطب يمثل النقطة ذات المطلق الاصغر .

اذا كانت $y = 0$

$$2x - (0) = 8 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4,0)$$

اذا كانت $x = 0$

$$2(0) - y = 8 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow (0,8)$$

$$a = 8 \Rightarrow a^2 = 64 \ , \ b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1}$$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + 3y = 12$ مع محور السينات حيث مساحة المنطقة لهذا القطع 24π .

الحل :

$$2x + 3y = 12 \Rightarrow 2x + 3(0) = 12 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow (6,0)$$

∵ المستقيم قطع الاحداثي السيني في النقطة $(6,0)$

$$V_1(6,0) \ , \ V_2(-6,0) \ , \ a = 6 \Rightarrow a^2 = 36$$

$$A = ab\pi \ , \ 24\pi = 6b\pi \Rightarrow b = \frac{24\pi}{6\pi}$$

$(0,4)$, $(0,-4)$ الاقطاب $\Rightarrow b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1}$$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = -24y$ ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$

الحل :

القطع المكافئ :

$$x^2 = -24y$$

$$x^2 = -4py \Rightarrow 4p = 24 \Rightarrow p = \frac{24}{4} = 6 \Rightarrow F(0,-6)$$

دليل القطع المكافئ :

$$y^2 = -4px$$

$$y^2 = -16x \Rightarrow 4p = 16 \Rightarrow p = \frac{16}{4} = 4$$

$(4,0)$ تنتمي للقطع الناقص

$$b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$$

البؤرتان $F_2(0,-6) \ , F_1(0,6)$

معادلة القطع الناقص $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{52} = 1}$

ملاحظات لرسم القطع الناقص :

١. نعين $V_1(a,0)$, $V_2(-a,0)$.
٢. نعين $M_1(0,b)$, $M_2(0,-b)$
٣. نصل بين النقاط الاربعة M_2 M_1 V_2 V_1 بالترتيب حتى يكون منحني متصل .
٤. نعين البؤرتين $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$

مراجعة

1. نرتب الحدودية
2. نجعل معامل x^2 , $y^2 = 1$
3. نجعل الطرف الايمن $= 1$
4. نقارن المعادلة مع المعادلة القياسية
5. مجموع طولي المحورين هو $2a + 2b$
6. الفرق بين طولي المحورين هو $2a - 2b$
7. النسبة بين طولي المحورين

- اذا كان البسط أكبر من المقام $\frac{2a}{2b}$
- اذا كان البسط أصغر من المقام $\frac{2b}{2a}$
- اذا كان مقام x^2 أكبر من مقام y^2 البؤرتان تقعان على المحور السيني x فإن المعادلة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- اذا كان مقام y^2 أكبر من مقام x^2 البؤرتان تقعان على المحور الصادي y فإن المعادلة $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

حل تمارين (2 – 2)

س1/ عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة المبينة معادلتها في كل مما يأتي :

$a)\ x^2 + 2y^2 = 1$

الحل :

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{بالمقارنة} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \quad , \quad b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

البؤرتان على محور السينات $\therefore\ F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\ ,F_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

الرأسان $\therefore\ V_1(1,0)\ ,V_2(-1,0)$

القطبان (طرفا المحور الصغير) $\therefore\ P_1\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ ,P_2\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

طول المحور الكبير $2a\ \Rightarrow 2\ (1) = 2$

طول المحور الصغير $2b\ \Rightarrow 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

المسافة بين البؤرتين $2c\ = 2\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

المركز $(0\ ,0)$ ، معادلة المحور الصغير $x = 0$ ، معادلة المحور الكبير $y = 0$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

b) $9x^2 + 13y^2 = 117$

الحل : بالقسمة على 117

$$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}\quad ,\quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 13 - 9 = 4 \Rightarrow c = 2$

البؤرتان على محور السينات $\therefore\ F_1(2,0)\ ,F_2(-2\ ,0)$

الرأسان $\therefore\ V_1(\sqrt{13}\ ,0)\ ,V_2(-\sqrt{13},0)$

القطبان $\therefore\ P_1(0,3)\ ,P_2(0,-3)$

طول المحور الكبير $2a\ \Rightarrow 2\ (\sqrt{13}) = 2\sqrt{13}$

طول المحور الصغير $2b\ \Rightarrow 2(3) = 6$

المسافة بين البؤرتين $2c\ = 2\ (2) = 4$

المركز $(0\ ,0)$ ، معادلة المحور الصغير $x = 0$ ، معادلة المحور الكبير $y = 0$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{13}} < 1$$

س2/ جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل في كل مما يأتي ثم ارسمه :

١- البؤرتان هما النقطتان $(5\ ,0)$ و $(-5\ ,0)$ وطول محوره الكبير يساوي (12) وحدة

الحل : البؤرتان سينيتان ومعادلة القطع :

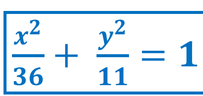
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$c = 5\ \Rightarrow\ c^2 = 25$

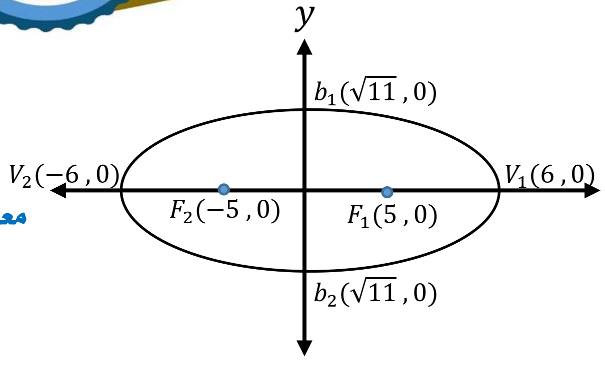
$2a = 12\ \Rightarrow a = 6\ \Rightarrow\ a^2 = 36$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$25 = 36 - b^2 \Rightarrow b^2 = 11$$



$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$ معادلة القطع الناقص



٢- البؤرتان هما $(0, \pm 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 4$

الحل : البؤرتان صاديتان ومعادلة القطع :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$c = 2 \Rightarrow c^2 = 4$$

$$b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 16 + 4 \Rightarrow a^2 = 20$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$$ معادلة القطع الناقص

٣- أحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين $5, 1$ وحدة على الترتيب

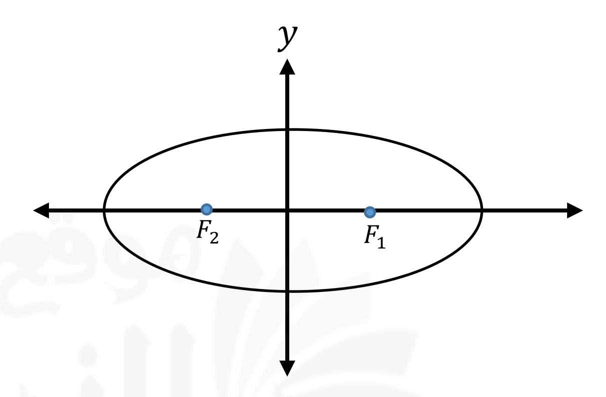
الحل :

$$2a = 5 + 1 = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$$

$$2c = 5 - 1 = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow c^2 = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$4 = 9 - b^2 \Rightarrow b^2 = 9 - 4 = 5$$



$\therefore$ هناك حالتين لمعادلة القطع الناقص وهما :

اذا كانت البؤرتان صاديتان فمعادلة القطع هي $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

اذا كانت البؤرتان سينيتان فمعادلة القطع هي $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

٤- الاختلاف المركزي يساوي $\frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير (12) وحدة طولية

الحل : لم يحدد موقع البؤرتين فنكتب معادلتين

$$\because e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 2c \Rightarrow a^2 = 4c^2$$

$\because 2b = 12 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow b^2 = 36$

$\because c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 4c^2 - 36 \Rightarrow 3c^2 = 36 \Rightarrow c^2 = 12$

$a^2 = 4(12) \Rightarrow a^2 = 48$

اذا كانت البؤرتان صاديتان فمعادلة القطع هي $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$

اذا كانت البؤرتان سينيتان فمعادلة القطع هي $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$

٥- المسافة بين بؤرتيه تساوي (8) وحدات ونصف محوره الصغير يساوي (3) وحدات

الحل : لم يحدد موقع البؤرتين

$2c = 8 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$

$\frac{1}{2}(2b) = 3 \Longrightarrow \text{b} = 3 \Rightarrow b^2 = 9$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25$

اذا كانت البؤرتان صاديتان فمعادلة القطع هي $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

اذا كانت البؤرتان سينيتان فمعادلة القطع هي $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

س3/ باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم :

١- بؤرتاه النقطتان $(0, \pm 2)$ ورأساه النقطتان $(0, \pm 3)$ ، ومركزه نقطة الأصل

الحل :

$\because c = 2 \quad , \quad a = 3$

$pF_1 + pF_2 = 2a$ حسب التعريف

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2} = 2\,(3)$

$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 6$

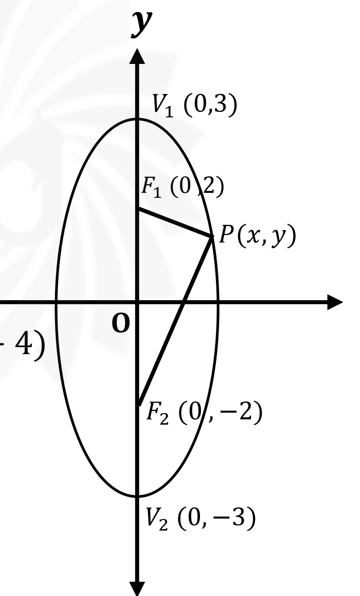
$[\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 6 - \sqrt{x^2 + (y+2)^2}]^2$ بتربيع الطرفين

$(x^2 + y^2 - 4y + 4) = (36 - 12\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + x^2 + y^2 + 4y + 4)$

$(12\sqrt{x^2 + (y+2)^2}) = 36 + 8y$ نقسم على 4

$3\sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 9 + 2y$ بتربيع الطرفين

$9[x^2 + (y+2)^2] = (9 + 2y)^2$



$$9(x^2+y^2+4y+4)=81+36y+4y^2$$
$$9\,x^2+9\,y^2+36y+36=81+36y+4y^2$$
$$9x^2+5\,y^2=45 \Longrightarrow \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$$

٢- المسافة بين البؤرتين (6) وحدة والعدد الثابت (10) والبؤرتان تقعان على محور السينات ومركزه في نقطة الاصل .

الحل :

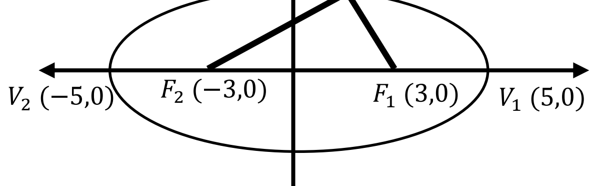
$\because 2c=6 \;\Rightarrow\; c=3 \;\Rightarrow\; (\pm 3\,,0)$ البؤرتان

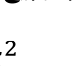
$\because 2a=10 \Rightarrow\; a=5 \;\Rightarrow\; (\pm 5\,,0)$ الرأسان

$\therefore PF_1+P\,F_2=2a$ حسب التعريف

$$\sqrt{(x-3)^2+\;(y-0)^2}\;+\sqrt{(x+3)^2+\;(y-0)^2}=2\,(5)$$
$$\sqrt{(x-3)^2+\;y^2}+\;\sqrt{(x+3)^2+\;y^2}=10$$
$\sqrt{(x-3)^2+\;y^2}=10-\sqrt{(x+3)^2+\;y^2}$ بتربيع الطرفين

$$x^2-6x+9+\;y^2=100-20\sqrt{(x+3)^2+\;y^2}+x^2+6x+9+\;y^2$$
$$\left[20\sqrt{(x+3)^2+\;y^2}=100+12x\quad\right]\div 4$$
$5\sqrt{(x+3)^2+\;y^2}=25+3x$ بتربيع الطرفين





$$25(x^2+6x+9+y^2)=625+150x+9x^2$$
$$25x^2+150x+225+25y^2=625+150x+9x^2$$
$$16x^2+25y^2=625-225$$
$16x^2+25y^2=400\,]\;\div(400)\Longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1}$ معادلة القطع الناقص

س4/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$ علما بأن القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}\,,\sqrt{3})$

الحل : القطع المكافئ :

$$y^2=-8x$$
$y^2=-4xp \;\Longrightarrow\; -4p=\;-8\;\Rightarrow p=2\quad\Rightarrow(-2\,,0)$ البؤرة

بؤرة القطع المكافئ $F\;(-2\,,0)$ وهي تمثل احدى بؤرتي القطع الناقص (سينية) $F\;(-2\,,0)$

القطع الناقص :

$$\boldsymbol{F_1\,(2\,,0)\;,\;\;F_2\,(-2\,,0)\,,\;\;c=2\;\Rightarrow\;c^2=4}$$
$$\boldsymbol{a^2=b^2+c^2\quad\Rightarrow\;a^2=\;b^2+4\;\ldots\ldots(1)}$$

$(2\sqrt{3}\,,\sqrt{3})$ تنتمي للقطع الناقص فهي تحقق معادلته :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \ldots\ldots (2)$$

$$\frac{12}{b^2+4}+\frac{3}{b^2}=1\ ]\times\ b^2(b^2+4)$$

$$12b^2+3b^2+12=\ b^2(b^2+4)$$

$$15b^2+12=\ b^4+4b^2 \Rightarrow b^4-15b^2+4b^2-12=0$$

$$b^4-11b^2-12=0$$

$$(b^2-12)(b^2+1)=0$$

$either\ \ b^2=12\ \Rightarrow\ a^2=12+4=16\quad (1)$ نعوض في معادلة

$or\quad b^2=-1$ تهمل ، $\boxed{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1}$ معادلة القطع الناقص

س5/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(3\,,4)\,,\ (6\,,2)$.

الحل : البؤرتان سينيتان فمعادلة القطع الناقص هي $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

$(6\,,2)$تنتمي للقطع الناقص فهي تحقق معادلته : $\frac{(6)^2}{a^2}+\frac{(2)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1\ \ldots\ldots(1)$

$(3\,,4)$تنتمي للقطع الناقص فهي تحقق معادلته : $\frac{(3)^2}{a^2}+\frac{(4)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\ \ldots\ldots(2)$

$$\frac{144}{a^2}+\frac{16}{b^2}=4\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$\mp\frac{9}{a^2}\mp\frac{16}{b^2}=\mp1$ بالطرح $\ldots\ldots\ldots(2)$

$$\frac{135}{a^2}=3\ \Rightarrow a^2=\frac{135}{3}\Rightarrow\ a^2=45$$

نعوض قيمة a^2 في المعادلة (1)

$$\frac{36}{45}+\frac{4}{b^2}=1\Rightarrow\frac{4}{b^2}=1-\frac{36}{45}\Rightarrow\frac{4}{b^2}=\frac{9}{45}\Rightarrow\frac{4}{b^2}=\frac{1}{5}\Rightarrow\ b^2=20$$

$\boxed{\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1}$ معادلة القطع الناقص

س6/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$.

الحل : $\because$ المنحني $x^2+y^2-3x=16$ يقطع المحور الصادي فإن $x=\ 0$

$$0+y^2-3(0)=16\ \Rightarrow\ y^2=16\ \Rightarrow y=\pm4\Rightarrow(0\,,4),(0\,,-4)$$

وتمثلان بؤرتي القطع الناقص (فتكون معادلته صادية) : $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$c=4 \Rightarrow c^2=16$

لإيجاد معادلة الدليل للقطع المكافئ :

$y^2=12x$

$y^2=4px \Longrightarrow 4p=12 \Rightarrow p=3$

$x=-3$ معادلة الدليل $\Rightarrow (-3\,,0)$ نقطة التماس

معادلة القطع الناقص صادية ومعادلة القطع المكافئ سينية ، وبما ان النقطة $(-3\,,0)$ تحقق معادلة القطع الناقص لأنه يمر بها .

$$\frac{(-3)^2}{b^2}+\frac{(0)^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{9}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=9$$

$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow a^2=9+16 \Longrightarrow a^2=25 \Longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1}$ معادلة القطع الناقص

س7/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتمي الى محور السينات ومركزه في نقطة الاصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2+8x=0$ عند النقطة التي احداثيها السيني يساوي (-2) .

الحل :

القطع المكافئ :

لإيجاد نقطتا تقاطع القطع الناقص مع القطع المكافئ : $x=-2$

$y^2+8(-2)=0 \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=\pm4 \Rightarrow (-2,-4),(-2\,,4)$

القطع الناقص :

البؤرتان تنتمي لمحور السينات معادلة القطع $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

$2a=2\,(2b) \Rightarrow a=2b \Rightarrow a^2=4b^2$

النقاط تنتمي للقطع الناقص (اي تحقق معادلته) :

$$\frac{(-2)^2}{4b^2}+\frac{(4)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{4b^2}+\frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{16}{b^2}=1 \Longrightarrow \frac{17}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=17$$

$a^2=4\,(17) \Rightarrow a^2=68 \Longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{68}+\frac{y^2}{17}=1}$ معادلة القطع الناقص

س8/ قطع ناقص $hx^2+ky^2=36$ ومركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2=4\sqrt{3}x$ ما قيمة كل من $h\,,k$ ؟

الحل : القطع المكافئ :

نلاحظ بأن معادلة القطع المكافئ سينية موجبة :

$y^2=4px$

$y^2 = 4\sqrt{3}x \Rightarrow p = \sqrt{3}$

بؤرة القطع المكافئ $F\left(\sqrt{3}, 0\right)$ وهي تمثل أحدى بؤرتي القطع الناقص (فتكون معادلته سينية)

القطع الناقص :

$$hx^2 + ky^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad c = \sqrt{3} \Rightarrow c^2 = 3$$

مجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) :

$$(2a)^2 + (2b)^2 = 60$$

$$4a^2 + 4b^2 = 60$$

$$a^2 + b^2 = 15 \Rightarrow b^2 = 15 - a^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow a^2 = 15 - a^2 + 3$$

$$2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 15 - 9 = 6$$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1}$

بالمقارنة : $\frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1$

$$\frac{36}{h} = 9 \Rightarrow h = 4 \quad , \quad \frac{36}{k} = 6 \Rightarrow k = 6$$

س9/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة .   وزاري ٢٠١٢ / د٣

الحل :

القطع المكافئ :

$$x^2 = 4py$$

$$x^2 = 24y \quad 4p = 24 \Rightarrow p = 6$$

بؤرة القطع المكافئ $F\,(0, 6)$ وهي تمثل إحدى بؤرتي القطع الناقص (فتكون معادلته صادية)

القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad , \quad c = 6 \Rightarrow c^2 = 36$$

مجموع طولي محوريه (36) :

$$2a + 2b = 36 \Rightarrow a + b = 18 \Rightarrow a = 18 - b$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(18-b)^2 = b^2+36 \Rightarrow 324-36b+b^2 = b^2+36$$

$$36b = 324-36 \Rightarrow 36b = 288 \Rightarrow b = \frac{288}{36} = 8 \Rightarrow a = 18-8 = 10$$

$$\therefore b^2 = 64 \quad , \quad a^2 = 100$$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1}$

س10/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(4,0)$, $F_2(-4,0)$ والنقطة Q ينتمي للقطع الناقص بحيث أن محيط المثلث $Q\,F_1F_2$ يساوي (24) وحدة . وزاري ٢٠١٤ / د١

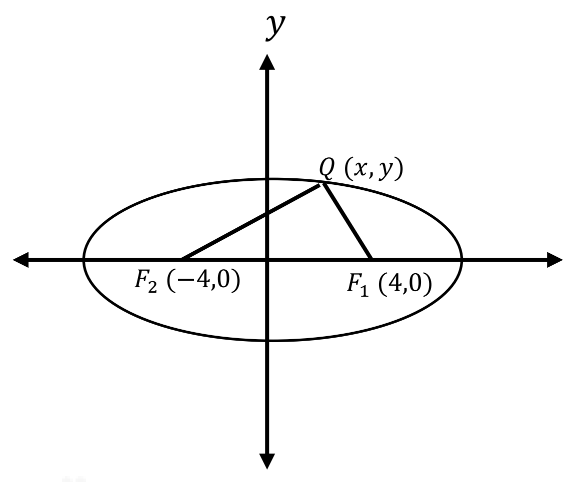
الحل : البؤرتان سينيتان ومعادلة القطع :

$$\because F_2(-4,0), F_1(4,0)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad c=4 \Rightarrow c^2 = 16$$

محيط المثلث = مجموع أضلاعه الثلاثة

$$\underbrace{Q\,F_1+QF_2}_{2a}+\underbrace{F_1F_2}_{2c} = 24$$



المسافة بين البؤرتين $F_1F_2 = 2c = 2(4) = 8$

حسب تعريف القطع الناقص $Q\,F_1+QF_2 = 2a$

$$2a+8 = 24 \Rightarrow 2a = 24-8 \Rightarrow 2a = 16$$

$$a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$$

$$a^2 = b^2+c^2 \Rightarrow 64 = b^2+16 \Rightarrow b^2 = 48$$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1}$

أمثلة اضافية محلولة

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومساحته 24π والنسبة بين طول محوريه $\frac{3}{8}$.

الحل :

$$A = ab\pi \Rightarrow 24\pi = ab\pi \Rightarrow a = \frac{24}{b}$$

$$\frac{2a}{2b} = \frac{3}{8} \Rightarrow 3a = 8b \Rightarrow a = \frac{8b}{3} \Rightarrow \frac{24}{b} = \frac{8b}{3} \Rightarrow 8b^2 = 72 \Rightarrow b^2 = 9$$

$\therefore b = 3 \Rightarrow a = \frac{24}{b} = \frac{24}{3} = 8 \Rightarrow a^2 = 64$

معادلة القطع الناقص $\therefore \boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1}$

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ومحوراه ينطبقان على المحورين الاحداثيين واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $(x^2 - 12y = 0)$ وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير

الحل : من القطع المكافئ :

$x^2 = 4ay$

$x^2 = 12y \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow (0,3)$ البؤرة

من القطع الناقص :

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftarrow c = 3 \Leftarrow (0,3),(0,-3)$ البؤرتان

$\because 2a = 2(2b) \Rightarrow a = 2b \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (2b)^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 4b^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 3b^2$
$= 9 \Rightarrow b^2 = 3$

$\therefore a^2 = 4b^2 = 4(3) = 12$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1}$

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي يمر بالنقطة $(0,3)$ والمسافة بين بؤرتيه 6 وحدات .

الحل :

$\because 2c = 6 \Rightarrow c = 3$

$\because a > c \Rightarrow b = 3$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 9 \Rightarrow a^2 = 18$

$\therefore \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$ معادلة القطع الناقص الأولى or $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص الثانية

مثال : لتكن $Mx^2 + Ny^2 = 400$ معادلة قطع ناقص إحدى بؤرتيه $(3,0)$ والنسبة بين طول محوره الكبير ومحوره الصغير $= \frac{4}{5}$ فجد قيم كل من $M, N \in R$

الحل :

$Mx^2 + Ny^2 = 400 \;] \div 400 \Rightarrow \frac{Mx^2}{400} + \frac{Ny^2}{400} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{400}{M}} + \frac{y^2}{\frac{400}{N}} = 1$

$\because$ البؤرة تنتمي لمحور السينات فإن $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = \frac{400}{M} \quad , \quad b^2 = \frac{400}{N} \quad , \quad c = 3$

$\because \frac{2b}{2a} = \frac{4}{5} \Rightarrow b = \frac{4}{5}a \Rightarrow b^2 = \frac{16}{25}a^2$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \left[a^2 = \frac{16}{25}a^2 + 9\right] \times 25$

$25a^2 = 16a^2 + 225 \Rightarrow 9a^2 = 225 \Rightarrow a^2 = 25 \quad , \quad b^2 = \frac{16}{25} . 25 = 16$

$a^2 = \frac{400}{M} \Rightarrow M = \frac{400}{a^2} = \frac{400}{25} = 16$

$b^2 = \frac{400}{N} \Rightarrow N = \frac{400}{b^2} = \frac{400}{16} = 25$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$ معادلة القطع الناقص

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مساحته 80π والذي يكون البعد بين بؤرتيه مساويا للبعد بين بؤرة القطع المكافئ $(y^2 + 24x = 0)$ ودليله .

الحل : القطع المكافئ

$y^2 = 4px$

$y^2 = -24x$

$\therefore 4p = -24 \Rightarrow p = -6 \Rightarrow |2p| = 12$

$2c = 12 \Rightarrow c = 6 \Rightarrow c^2 = 36$

القطع الناقص

$A = ab\pi \Rightarrow 80\pi = ab\pi \Rightarrow ab = 80 \Rightarrow b = \frac{80}{a} \Rightarrow b^2 = \frac{6400}{a^2}$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \frac{6400}{a^2} + 36 \xRightarrow{(\times a^2)} a^4 = 6400 + 36a^2$

$a^4 - 36a^2 - 6400 = 0 \Rightarrow (a^2 - 100)(a^2 + 64) = 0$

$either \ a^2 = 100 \Rightarrow b^2 = \frac{6400}{100} = 64$

$or \quad b^2 = -64$ يهمل

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1}$ معادلة القطع الناقص الأول $\quad \therefore \boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1}$ معادلة القطع الناقص الثاني

مثال : اذا كانت $\frac{y^2}{3M-2} - x = 0$ معادلة قطع مكافيء دليله يمر بالنقطة $(-1 , 2)$ جد معادلة القطع الناقص الذي أحد بؤرتيه $(0 , M)$ ومربع طول النسبة بين محوريه $= \frac{3}{4}$.

الحل : من القطع المكافئ : نلاحظ ان القطع المكافئ من النوع السيني لذا فإن معادلة الدليل له

$x = -p = -(-1) \Rightarrow x = 1$ لأنه يقع على المحور السيني

$y^2 = (3M - 2)x$

$y^2 = 4px \Rightarrow 3M - 2 = 4p \Rightarrow 3M - 2 = 4 \Rightarrow M = 2$

من القطع الناقص : بؤرتاه $(0 , 2) , (0 , -2)$ والقانون $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\because \frac{4b^2}{4a^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad , \quad c^2 = 4$

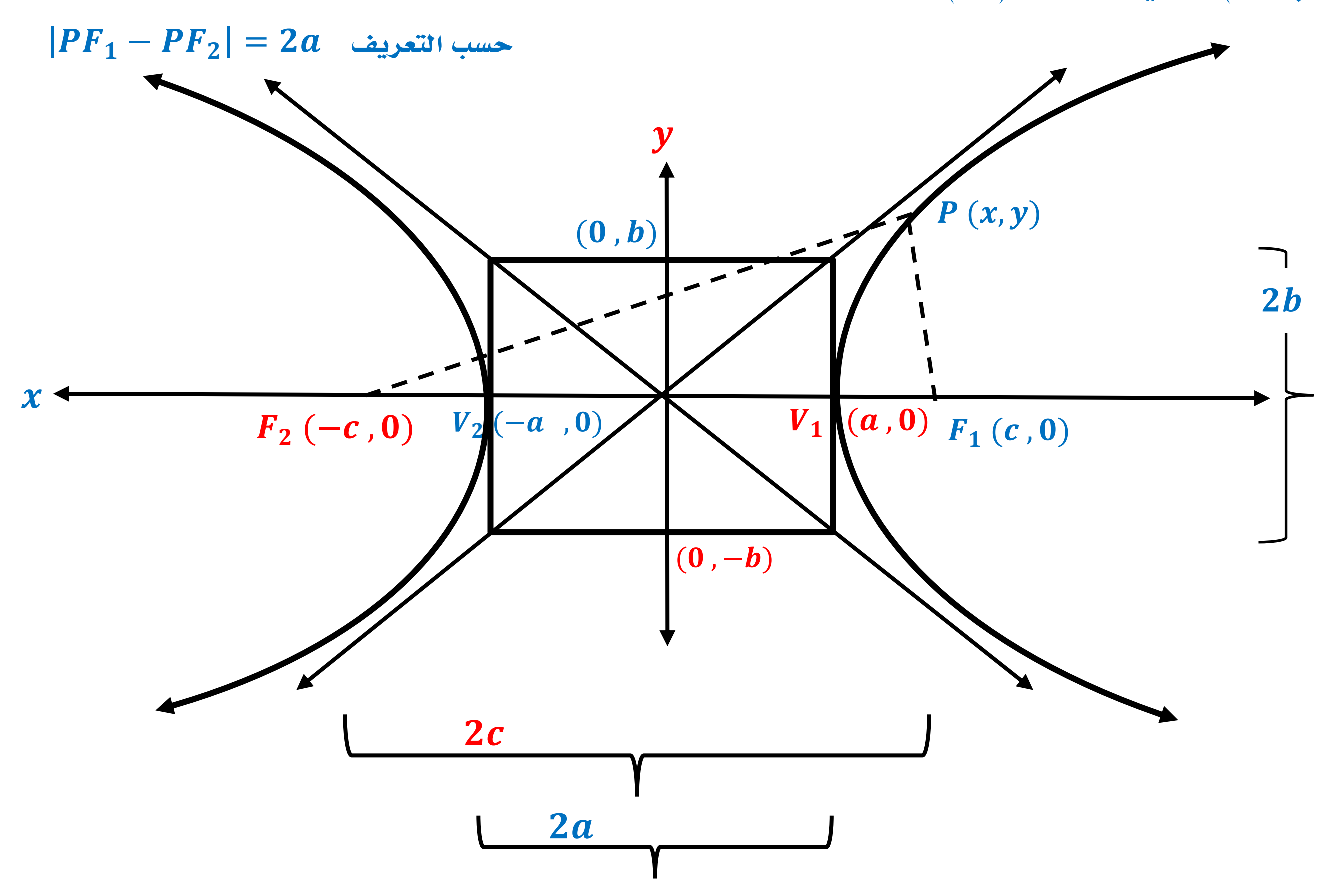
$\because a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4}a^2 + 4 \xRightarrow{\times 4} 4a^2 = 3a^2 + 16 \Rightarrow a^2 = 16 \quad , \quad b^2 = 12$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1}$ معادلة القطع الناقص

القطع الزائد Hyperbola

القطع الزائد : هي مجموعة النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عدداً ثابتا $(2a)$.

حسب التعريف $|PF_1 - PF_2| = 2a$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ معادلة قطع زائد بؤرتاه سينيتان والمركز نقطة الاصل

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$ معادلة قطع زائد بؤرتاه صاديتان والمركز نقطة الاصل

جدول يبين مفردات القطع الزائد في الحالتين :

القطع الزائد	البؤرتان	الرأسان	القطبان	المعادلة
) (	$F_1\ (c\ ,0)$ $F_2\ (-c\ ,0)$	$V_1\ (a\ ,0)$ $V_2\ (-a\ ,0)$	$(0\ ,b)$ $(0\ ,-b)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
◡ ◠	$F_1\ (0\ ,c)$ $F_2\ (0\ ,-c)$	$V_1\ (0\ ,a)$ $V_2\ (0, -a)$	$(b\ ,0)$ $(-b\ ,0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

ملاحظات :

1) دائما $c > a , b$ ، $a , b , c > 0$

2) طول المحور الحقيقي $= 2a$ (العدد الثابت)

3) طول المحور التخيلي $= 2b$ (المحور المرافق)

4) المسافة بين البؤرتين $= 2c$ (البعد البؤري)

5) الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} > 1$

6) $c^2 = a^2 + b^2$

7) اذا كانت إشارة الـ (x^2) موجبة فالقطع الزائد بؤرتاه سينيتان .

8) اذا كانت إشارة الـ (y^2) موجبة فالقطع الزائد بؤرتاه صاديتان .

مثال : عين البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

الحل :

طول المحور الحقيقي $\because a^2 = 64 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow 2a = 16$ وحدة

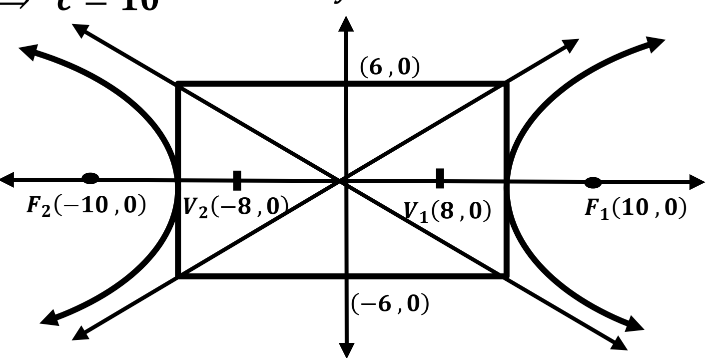
طول المحور المرافق $\because b^2 = 36 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow 2b = 12$ وحدة

$c^2 = a^2 + b^2 = 64 + 36 \Rightarrow c^2 = 100 \Rightarrow c = 10$

رأسا القطع الزائد $V_1(8 , 0)$, $V_2(-8 , 0)$

قطبا القطع الزائد $P_1(0 , 6)$, $P_2(0 , -6)$

بؤرتا القطع الزائد $F_1(10 , 0)$, $F_2(-10 , 0)$



مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره المرفق (4) وحدات وبؤرتاه هما النقطتان $F_1(0 , \sqrt{8}) , F_2(0 , -\sqrt{8})$.

الحل : $\because$ البؤرتان تنتمي لمحور الصادات

$\therefore$ المعادلة القياسية للقطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$

$\because 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow b^2 = 4$

$c = \sqrt{8} \Rightarrow c^2 = 8$

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 8 - 4 \Rightarrow a^2 = 4$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1}$

في هذا المثال يكون المحور الحقيقي مساوٍ للمحور المرافق ويسمى القطع الزائد القائم وأختلافه المركزي ثابت هو $\sqrt{2}$ لأن النقاط الاربعة تشكل رؤوس مربع .

مثال : جد معادلة القطع الزائد إختلافه المركزي (2) والمسافة بين بؤرتيه (12) وبؤرتاه على محور الصادات.

الحل : البؤرتان صاديتان فمعادلة القطع

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

$$2c = 12 \Rightarrow c=6$$

$$e=\frac{c}{a} \Rightarrow a=\frac{c}{e} \Longrightarrow a=\frac{6}{2}=3 \quad \Longrightarrow a^2=9$$

$$c^2 = a^2+b^2 \quad \Longrightarrow b^2=c^2-a^2 \Longrightarrow b^2=36-9 \Rightarrow b^2=27$$

$$\boxed{\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1}$$ معادلة القطع الزائد

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتاه (10 , 0) والفرق بين طول محوره الحقيقي والتخيلي يساوي 4 .

الحل :

$$c=10 \Longrightarrow c^2=100$$

$$2a-2b=4 \Rightarrow a-b=2$$

$$a = 2+b \;\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$c^2 = a^2+b^2$$

$$100 = (2+b)^2+b^2$$

$$100 = 4+4b+b^2+b^2$$

$$100=4+4b+2b^2$$

$$[2b^2+4b-96=0] \div 2$$

$$b^2+2b-48=0$$

$$(b+8)(b-6) = 0$$

$b = -8$ تهمل

$$b = 6 \Rightarrow b^2=36$$

$$a=2+6=8 \Longrightarrow a^2=64$$

$$\boxed{\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1}$$ معادلة القطع الزائد

مثال : جد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه نقطة الاصل أحد بؤرتيه (0 , −6) وأحد رأسيه (0 , 4) .

الحل : القطع المخروطي اذا لم يذكر نوعه ولكن من علاقة $c > a$ نحصل على أنه قطع زائد .

$$c=6 \Longrightarrow c^2=36$$

$a = 4 \Rightarrow a^2=16 \qquad \therefore c>a$ لأنه قطع زائد

$$c^2 = a^2+b^2$$

$$36 = 16+b^2 \Rightarrow b^2=36-16 \Rightarrow b^2=20$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1}$

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وأحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $y^2-32x=0$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه الى طول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{3}$ ؟

الحل :

القطع المكافئ $y^2-32x=0$

$$y^2=32x$$

$$y^2=4px \Longrightarrow 4p=32 \Longrightarrow p=8$$

للقطع الزائد V_1 , V_2 ، بؤرة القطع المكافئ $F_1(8,0)$

$$\frac{2c}{2b}=\frac{5}{3} \Longrightarrow 3c=5b \Longrightarrow c=\frac{5b}{3} \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$\left(\frac{5b}{3}\right)^2=64+b^2$$

$$[\frac{25b^2}{9}=64+b^2]\times 9$$

$$25b^2=576+9b^2 \Longrightarrow 25b^2-9b^2=576$$

$$16b^2=576 \Rightarrow b^2=\frac{576}{16}=36 \Rightarrow b=6$$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1}$

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بالنقطتين $\left(-5,\frac{9}{4}\right),\left(4\sqrt{2},3\right)$ ؟

الحل : نعوض النقطة $\left(4\sqrt{2},3\right)$ في معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{(4\sqrt{2})^2}{a^2}-\frac{(3)^2}{b^2}=1$$

$$\left(\frac{32}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1\right)a^2b^2$$

$$32b^2-9a^2=a^2b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

نعوض النقطة $\left(-5,\frac{9}{4}\right)$ في معادلة القطع الزائد

$$\frac{(-5)^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^2}{b^2}=1$$

$$\left(\frac{25}{a^2}-\frac{\frac{81}{16}}{b^2}=1\right)a^2b^2$$

$$25b^2-\frac{81}{16}a^2=a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$32\,b^2-9a^2=a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\mp 25b^2+\frac{81}{16}a^2=\mp a^2b^2 \ldots\ldots(2)$$

$$\left[7b^2-\frac{63}{16}a^2=0\right]\times 16$$

$$112b^2-63a^2=0$$

$$63a^2=112b^2 \Rightarrow a^2=\frac{112}{63}b^2 \Rightarrow a^2=\frac{16}{9}b^2$$

$$32b^2-9.\frac{16}{9}b^2=\frac{16}{9}b^2b^2$$

$$32b^2-16b^2=\frac{16}{9}b^4 \Rightarrow 16b^2=\frac{16}{9}b^4 \Rightarrow 16=\frac{16}{9}b^2 \Rightarrow b^2=9$$

$$a^2=\frac{16}{9}b^2 \Rightarrow a^2=\frac{16}{9}\times 9=16$$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1}$

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بالنقطة $(3\,,0)$ والبعد بين بؤرتيه 10 وحدات ؟

الحل :

$$a=3 \Rightarrow a^2=9$$

$$2c=10 \Rightarrow c=5 \Rightarrow c^2=25$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$25=9+b^2 \Rightarrow b^2=16 \Rightarrow b=4$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1}$

مثال : جد معادلة القطع الزائد أحد بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2=-40x$ والذي يمس دليل القطع المكافئ $y^2+16x=0$ ؟

الحل :

$$y^2=-40x \quad , \quad y^2=-16x$$

$$y^2=-40x \quad , \quad y^2=-40x$$

$$4p=40 \Rightarrow p=\frac{40}{4}=10 \quad , \quad 4p=16 \Rightarrow p=\frac{16}{4}=4$$

$F(-10\,,0)$ القطع المكافئ , $x=4\,,\ a=4$ معادلة الدليل

نقطة التماس $a^2=16$ للقطع الزائد $(4\,,0)$

$c=10 \Rightarrow c^2=100 \qquad c=10 \ ,\ F_1(10\,,0)\ ,\ F_2(-10\,,0)$ بؤرتي القطع الزائد

$c^2 = a^2 + b^2$

$100 = 16 + b^2$

$b^2 = 100 - 16$

$b^2 = 84$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{84} = 1}$

مثال : عين البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

الحل :

$\because a^2 = 64 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow 2a = 2 \times 8 = 16$ وحدة طول المحور الحقيقي

$\because b^2 = 36 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow 2b = 2 \times 6 = 12$ وحدة طول المحور المرافق

$c^2 = a^2 + b^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow c^2 = 100 \Rightarrow c = 10$

$V_1(8, 0), V_2(-8, 0)$ رأسا القطع الزائد

$P_1(0, 6), P_2(0, -6)$ قطبا القطع الزائد

$F_1(10, 0), F_2(-10, 0)$ بؤرتا القطع الزائد

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $(0, -2\sqrt{5})$ وطول محوره الحقيقي (8) وحدات .

الحل : البؤرة صادية ومعادلة القطع $\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$

$c = 2\sqrt{5} \Rightarrow c^2 = 20$

$2a = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 20 - 16 \Rightarrow b^2 = 4$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1}$

ملاحظة : اذا مر القطع الزائد بنقطة إحدى إحداثياتها (صفر) ، فالنقطة تمثل إحدى رؤوسه .

حل تمارين (3 – 2)

س1/ عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة الاتية :

a) $12x^2 - 4y^2 = 48$

الحل : نقسم طرفي المعادلة على (48)

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

طول المحور الحقيقي $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2a = 4$ وحدة

طول المحور المرافق $b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2b = 2\left(2\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$ وحدة

$\because\ c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

البؤرتان $F_1(4,0)\ ,\ F_2(-4,0)$ الرأسان $V_1(2,0)\ ,\ V_2(-2,0)$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2 > 1$

b) $16x^2 - 9y^2 = 144$

الحل : نقسم طرفي المعادلة على (144)

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

طول المحور الحقيقي $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 6$ وحدة

طول المحور المرافق $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$ وحدة

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

الرأسان $V_1(3,0)\ ,\ V_2(-3,0)$ البؤرتان $F_1(5,0)\ ,\ F_2(-5,0)$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} > 1$

س2/ أكتب معادلة القطع الزائد في الحالات الاتية ثم ارسم القطع :

أ- البؤرتان هما النقطتان $(\pm 5,0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 3$ ومركزه نقطة الاصل .

الحل : البؤرتان سينيتان ومعادلة القطع :

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow c^2 = 25$

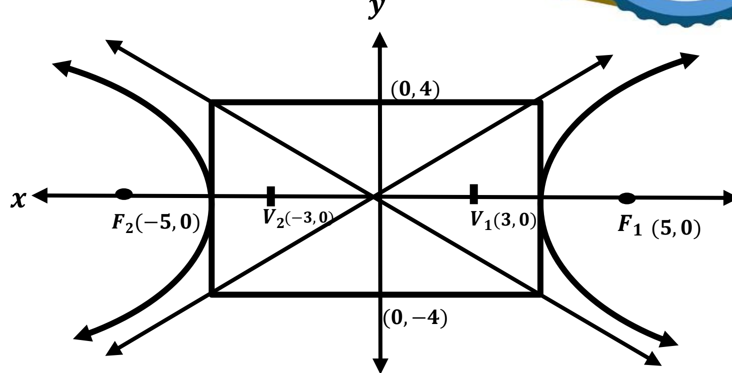
$\because\ \overline{F_1}(-5,0)\ ,\ \overline{F_2}(5,0)$

ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 3$ والرأسان هما :

$V_1(3,0)\ ,\ V_2(-3,0) \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

$c^2 = a^2 + b^2$

$25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$



معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

ب− طول محوره الحقيقي (12) وحدة ، وطول محوره المرافق (10) وحدات ، وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ومركزه نقطة الاصل .

الحل :

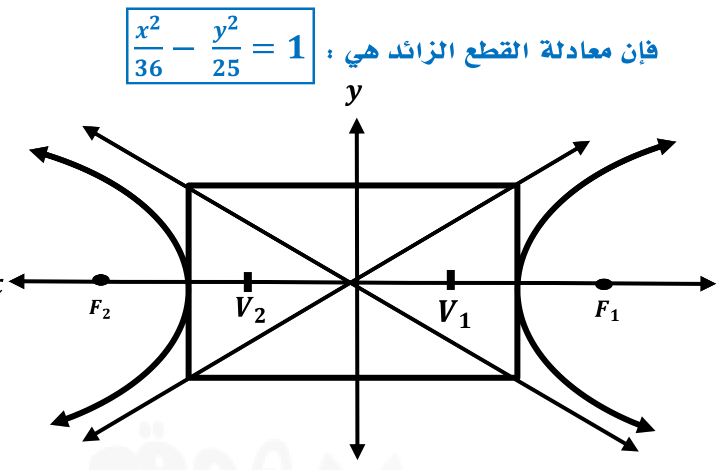
$\because 2a = 12 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a^2 = 36$

$\because 2b = 10 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$

$\because c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 36 \Longrightarrow c^2 = 61$

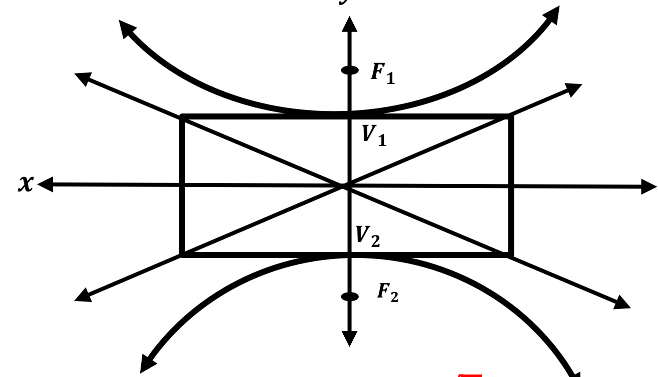
البؤرتان سينيتان

فإن معادلة القطع الزائد هي : $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$



البؤرتان صاديتان

فإن معادلة القطع الزائد هي : $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$



ج) مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ وحدة وإختلافه المركزي (3) .

الحل : البؤرتان صاديتان ومعادلة القطع الزائد   وزاري ٢٠١٣ / د٢

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

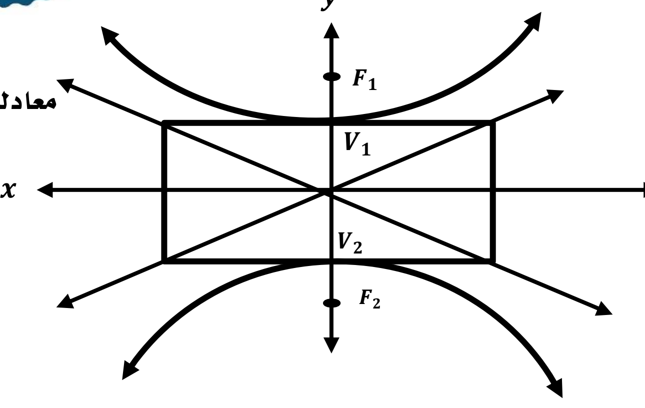
$\because 2b = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2} \Rightarrow b^2 = 2$

$\because e = \frac{c}{a} \Rightarrow 3 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 3a \Rightarrow c^2 = 9\,a^2$

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 9\,a^2 = a^2 + 2 \Rightarrow 8a^2 = 2 \Rightarrow \boxed{a^2 = \frac{1}{4}}$, $\boxed{c^2 = \frac{9}{4}}$

$F_1\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $F_2\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

$V_1\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $V_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$



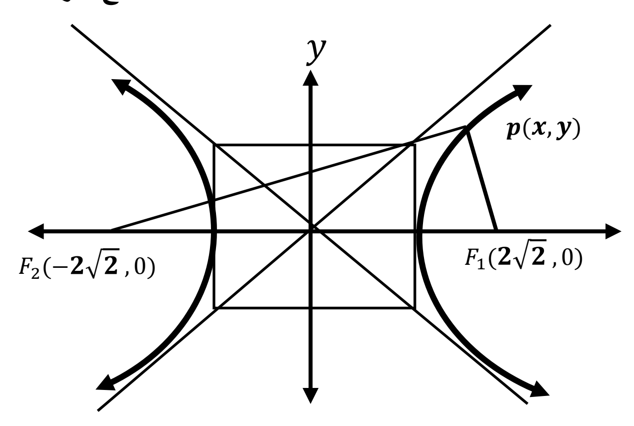
معادلة القطع الزائد $\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{4y^2}{1} - \frac{x^2}{2} = 1$

س3/ جد باستخدام التعريف القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتيه $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أية نقطة منه عن بؤرتيه يساوي (4) .

الحل :

القطع الزائد $P(x, y) \in$ النقطة , $\because 2a = 4 \Longrightarrow a = 2$

$\therefore |pF_1 - p\,F_2| = 2a$ (حسب التعريف)



$pF_1 - p\,F_2 = \pm 2a$

$\sqrt{\left(x - 2\sqrt{2}\right)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 + (y-0)^2} = \pm 4$

$\sqrt{\left(x - 2\sqrt{2}\right)^2 + y^2} - \sqrt{\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 + y^2} = \pm 4$

$\sqrt{\left(x - 2\sqrt{2}\right)^2 + y^2} = \pm 4 + \sqrt{\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 + y^2}$ (بتربيع الطرفين)

$x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 16 \pm 8\sqrt{\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 + y^2} + x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2$

$[\pm 8\sqrt{\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 + y^2} = 16 + 8\sqrt{2}x \quad] \div 8$

$\pm\sqrt{\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 + y^2} = 2 + \sqrt{2}x$ (بتربيع الطرفين)

$x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 4 + 4\sqrt{2}x + 2x^2 \Longrightarrow 2x^2 - x^2 - y^2 = 8 - 4$

$[\,x^2 - y^2 = 4 \quad] \div 4$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1}$

س4/ قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(1,2\sqrt{5}),(1,-2\sqrt{5})$ ، جد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل . وزاري ٢٠١٣ / د٣ وزاري ٢٠١٤ / د١

الحل : من القطع المكافئ

$\because$ النقطتان $(1,2\sqrt{5}),(1,-2\sqrt{5})$ متناظرة مع المحور السيني لذا فبؤرته سينية وفتحته نحو اليمين ومعادلة القطع المكافئ $y^2 = 4px$.

$\because$ النقطة $(1,2\sqrt{5})$ تحقق معادلة القطع المكافئ (لأنه يمر بها)

$(2\sqrt{5})^2 = 4p(1) \Rightarrow 20 = 4p \Rightarrow p = 5 \Rightarrow (5,0)$ البؤرة

$y^2 = 20x$ معادلة القطع المكافئ

بؤرة القطع المكافئ $(5,0)$ تمثل إحدى بؤرتي القطع الزائد

من القطع الزائد

$\because 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

$\because$ $(5,0),(-5,0)$ بؤرتا القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\therefore c = 5 \Rightarrow c^2 = 25$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}$

س5/ قطع زائد مركزه نقطة الاصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $6\sqrt{2}$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمة كل من h,k التي تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية . وزاري ٢٠١٢ / د٢

الحل :

من القطع الناقص :

$$[9x^2 + 16y^2 = 576\ ] \div 576 \Rightarrow \frac{9x^2}{576} + \frac{16y^2}{576} = \frac{576}{576} \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$\boxed{a^2 = 64}$ $\boxed{b^2 = 36}$ $\Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 64 - 36 = 28 \Rightarrow c = 2\sqrt{7}$

$\therefore (-2\sqrt{7},0),(2\sqrt{7},0)$ بؤرتا القطع الناقص

من القطع الزائد :

بؤرتا القطع الزائد $(-2\sqrt{7},0),(2\sqrt{7},0)$ $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

$c = 2\sqrt{7} \Rightarrow c^2 = 28$

$2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 18$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 28 = 18 + b^2 \Rightarrow b^2 = 10$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1}$

$$[hx^2 - ky^2 = 90] \div 90 \Rightarrow \frac{hx^2}{90} - \frac{ky^2}{90} = \frac{90}{90} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$$

$$a^2 = \frac{90}{h} \Rightarrow h = \frac{90}{a^2} = \frac{90}{18} \Rightarrow \boxed{h = 5} \quad , \quad b^2 = \frac{90}{k} \Rightarrow k = \frac{90}{b^2} = \frac{90}{10} \Rightarrow \boxed{k = 9}$$

س6/ أكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل اذا علمت أن أحد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 1 , 9 وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين . وزاري ٢٠١٢ / د٣

الحل :

$$2c = 1 + 9 = 10 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow \boxed{c^2 = 25}$$

$$2a = 9 - 1 = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow \boxed{a^2 = 16}$$

$$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 16 \Rightarrow \boxed{b^2 = 9}$$

هناك احتمالين لمعادلة القطع الزائد

معادلة القطع الزائد سينية $\boxed{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}$ معادلة القطع الزائد صادية $\boxed{\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1}$

س7/جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبة بين طولي محوريه $= \frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل . وزاري ٢٠١٣ / د٣

الحل : من القطع الزائد

$$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{3y^2}{12} = \frac{12}{12} \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\therefore \boxed{a^2 = 12} \quad \boxed{b^2 = 4} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

∴ بؤرتا القطع الزائد $(-4, 0), (4, 0)$

من القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

بؤرتا القطع الناقص $(-4, 0), (4, 0) \Rightarrow c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$

$$\because \frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \Rightarrow a = \frac{5b}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{25b^2}{9}$$

$$a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow [\frac{25b^2}{9} = 16 + b^2] \times 9$$

$$25b^2 = 144 + 9b^2 \Rightarrow 16b^2 = 144 \Rightarrow b^2 = 9$$

$$a^2 = \frac{25b^2}{9} = \frac{25(9)}{9} \Rightarrow a^2 = 25$$

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$

س8/ النقطة $P\ (6\ ,L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2-3y^2=12$ جد كلاً من

أ) قيمة L .

ب) طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة P .

الحل :

أ) النقطة $P\ (6\ ,L)$ تنتمي الى القطع الزائد وهي تحقق معادلته $x^2-3y^2=12$

$$(6)^2-3y^2=12 \Rightarrow 36-3L^2=12 \Rightarrow 3L^2=24 \Rightarrow L^2=8 \Rightarrow L=\pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore P_1\left(6\ ,2\sqrt{2}\right)\quad ,\quad P_2\left(6\ ,-2\sqrt{2}\right)$$

ب) من القطع الزائد :

$$[x^2-3y^2=12]\div 12 \Rightarrow \frac{x^2}{12}-\frac{3y^2}{12}=\frac{12}{12} \Rightarrow \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1 \Longrightarrow \boxed{a^2=12}\quad \boxed{b^2=4}$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=12+4=16 \Rightarrow c=\pm 4 \Rightarrow F_1(4\ ,0)\quad ,\quad F_2(-4\ ,0)$$

المقصود بنصف القطر البؤري (اليمين) هو البعد بين البؤرة اليمنى $F_1(4\ ,0)$ والنقطة P .

$$P_1F_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(6-4)^2+(2\sqrt{2}-0)^2}=\sqrt{4+8}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$ وحدة طول

س9/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$.

وزاري ٢٠١١ / د١ وزاري ٢٠١٤ / د٢ وزاري ٢٠١٥ / د١

الحل :

من القطع المكافئ

$$\left.\begin{matrix} x^2=-12y \\ x^2=-4py \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow -4p=-12 \Rightarrow p=3$$

معادلة الدليل $y=p \Longrightarrow \boxed{y=3}$

من القطع الناقص

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1 \Rightarrow a^2=25\quad ,\quad b^2=9$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c^2=25-9 \Rightarrow c^2=16 \Longrightarrow c=4$$

$$(0\ ,4)\quad ,\quad (0\ ,-4)$$

من القطع الزائد

∵ دليل القطع المكافئ يقطع المحور الصادي عند النقطة $(0\ ,3)$ وهي رأس القطع الزائد

$$a=3 \Rightarrow a^2=9$$

بؤرتا القطع الناقص (صاديتان) وتنطبقان على بؤرتي القطع الزائد فمعادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$

بؤرتا القطع الزائد $(0\ ,4),(0\ ,-4)$

$$c=4 \Longrightarrow c^2=16$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 16=9+b^2 \Rightarrow b^2=7$$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1}$

أمثلة اضافية محلولة

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل والبؤرتان على محور الصادات وطول المحور الحقيقي له 16 والنسبة بين المسافة بين بؤرتيه وطول محوره الحقيقي $\frac{5}{4}$.

الحل :

$$\because 2a = 16 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$$
$$\because \frac{2c}{2a} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{c}{8} = \frac{5}{4} \Rightarrow c = \frac{40}{4} = 10 \Rightarrow c^2 = 100$$
$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 100 - 64 \Rightarrow b^2 = 36$$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1}$

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 20y$ وطول محوره المرافق يساوي البعد بين بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

الحل : من القطع المكافئ :

$$x^2 = 4py$$
$$x^2 = 20y$$
$$4p = 20 \Rightarrow p = 5 \Rightarrow (0, 5)$$ البؤرة

من القطع الناقص :

$$a^2 = 16 \quad , \quad b^2 = 9 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7} \Rightarrow \boxed{2c = 2\sqrt{7}}$$

من القطع الزائد :

$$\because 2b = 2\sqrt{7}$$ طول المحور المرافق $$b = \sqrt{7} \Rightarrow \boxed{b^2 = 7}$$

بؤرتا القطع الزائد $(0, -5) , (0, 5)$ ، $c = 5$ ، $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 25 - 7 \Rightarrow \boxed{a^2 = 18}$$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{7} = 1}$

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقطتين $(3, -6) , (0, 3\sqrt{2})$

الحل : $\because$ القطع الزائد يمر بالنقطة $(0, 3\sqrt{2})$ لذا فالنقطة تمثل رأس القطع الزائد وقيمة $a = 3\sqrt{2}$ فإن

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

$\therefore (3, -6)$ تنتمي للقطع الزائد لذا فهي تحقق معادلته

$$\frac{(-6)^2}{(3\sqrt{2})^2} - \frac{(3)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{36}{18} - \frac{9}{b^2} = 1 \Rightarrow 2 - \frac{9}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{9} = 1}$$

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ وطول محوره الحقيقي (12) وحدة .

الحل : من القطع الناقص :

$a^2=100 \quad , \quad b^2=64 \quad \Rightarrow \quad a=\pm 10 \Rightarrow (-10\,,0)\,,(10\,,0)$ رأسا القطع الناقص

من القطع الزائد :

بؤرتا القطع الزائد $(-10\,,0)\,,(10\,,0) \Rightarrow c=10 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\because 2a=12 \Rightarrow a=6 \Rightarrow a^2=36$

$\because c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b^2=100-36 \Rightarrow b^2=64$

معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1}$

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبعده البؤري مساويا لبعد بؤرة القطع المكافئ عن دليله $y^2+24x=0$ ، اذا علمت ان مساحة القطع الناقص $80\pi\ cm^2$. وزاري ٢٠١٦ / د١

الحل : في القطع المكافئ :

$$y^2=-4px$$

$$y^2+24x=0 \Rightarrow y^2=-24x$$

البعد بين بؤرة القطع المكافئ ودليله $-24x=-4px \xrightarrow{(\div -4)} p=6 \Rightarrow 2p=12$

في القطع الناقص :

$2c=12 \Rightarrow c=6 \Rightarrow c^2=36$

$a^2=c^2+b^2 \Rightarrow a^2-b^2=36 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$A=ab\pi \Rightarrow 80\pi=ab\pi \Rightarrow b=\frac{80}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض المعادلة (2) في المعادلة (1) فينتج :

$a^2-\left(\frac{80}{a}\right)^2=36 \xrightarrow{(\times a^2)} a^4-6400=36a^2 \Rightarrow a^4-36a^2-6400=0$

$(a^2-100)(a^2+64)=0$

أما $a^2=100 \Rightarrow b^2=\frac{6400}{a^2}=\frac{6400}{100}=64$

أو $a^2=-64$ يهمل

$\therefore$ هناك معادلتان للقطع الناقص لأن موقع البؤرتين غير محدد وهما :

$\boxed{\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1}$ or $\boxed{\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1}$

مثال : جد معادلة القطع الزائد والناقص اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الآخر وكلاهما يقعان على محور السينات وطول المحور الكبير $6\sqrt{2}$ وحدة طول وطول المحور الحقيقي يساوي 6 وحدة طول .وزاري ٢٠١٦ / د١

الحل : $\because$ كل من القطعين يمر ببؤرة الآخر

$\therefore$ رأسا القطع الناقص يمثلان بؤرتا القطع الزائد وبؤرتا القطع الناقص تمثلان رأسا القطع الزائد

a للناقص $= c$ للزائد a للزائد $= c$ للناقص

القطع الناقص $2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 18$

القطع الزائد $2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

$\Rightarrow c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$ بؤرتي القطع الناقص $(\pm 3, 0)$ ، رأسي القطع الناقص $(\pm 3\sqrt{2}, 0)$

$\because a^2 = b^2 + c^2$

$\therefore b^2 = 18 - 9 \Rightarrow b^2 = 9$

$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$ رأسي القطع الزائد $(\pm 3, 0)$ ، بؤرتي القطع الزائد $(\pm 3\sqrt{2}, 0)$

$\because c^2 = a^2 + b^2$

$b^2 = 18 - 9 \Rightarrow b^2 = 9$

معادلة القطع الزائد $\therefore \boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1}$ معادلة القطع الناقص $\therefore \boxed{\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1}$

حل التمارين العامة الخاصة بالفصل الثاني

س3/ قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وقطع زائد نقطة تقاطع محوريه نقطة الاصل كل منهما يمر ببؤرة الاخر فإذا كانت $9x^2 + 25y^2 = 225$ معادلة القطع الناقص فجد :   وزاري ٢٠١٤ / د٣

أ) مساحة القطع الناقص   ب) محيط القطع الناقص   ج) معادلة القطع الزائد ثم ارسمه

د) الاختلاف المركزي لكل منهما

الحل :

أ) مساحة القطع الناقص

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \overset{\div 225}{\Longrightarrow} \frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$, $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$\therefore A = ab\pi = (5)(3)\pi = 15\,\pi$ وحدة مربعة

ب) محيط القطع الناقص

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25+9}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{34}{2}} = 2\pi\sqrt{17}$$ وحدة

ج) من القطع الناقص :

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \quad , \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$\therefore (5\,,0)\ ,(-5\,,0)$ الرأسان $\quad (4\,,0),(-4\,,0)$ البؤرتان

من القطع الزائد :

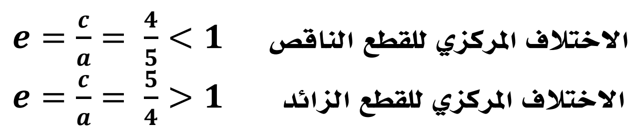
$\because$ القطع الزائد يمر ببؤرة القطع الناقص

$(5\,,0)\ ,(-5\,,0)$ البؤرتان $\quad (4\,,0),(-4\,,0)$ الرأسان

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 16 \Rightarrow b^2 = 9$$

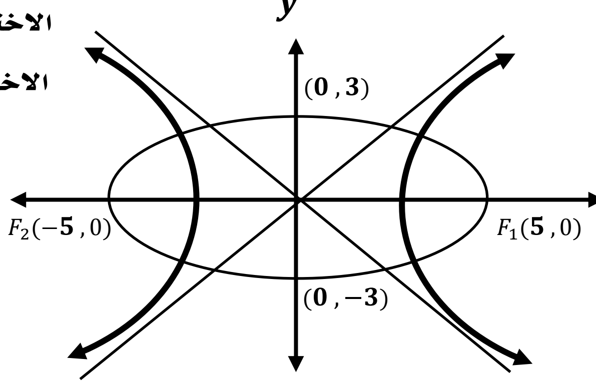
معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}$

د) الاختلاف المركزي :



الاختلاف المركزي للقطع الناقص $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} < 1$

الاختلاف المركزي للقطع الزائد $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1$



س4/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي $10\,\pi$ وحدة . وزاري ٢٠١٥ / د٣ وزاري ٢٠١٨ / د١

الحل :

مساحة منطقة القطع الناقص $= 7\pi$

$$A = ab\pi = 7\pi \Rightarrow ab = 7 \Rightarrow b = \frac{7}{a} \ \dots\dots\dots (1)$$

محيط القطع الناقص $= 10\pi$

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \Rightarrow 10\pi = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \xrightarrow{(\div 2\pi)} 5 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$ بالتربيع

$$\frac{a^2+b^2}{2} = 25 \Rightarrow a^2 + b^2 = 50 \ \dots\dots\dots (2)$$

بتعويض معادلة (1) في معادلة (2) :

$$\left[a^2 + \frac{49}{a^2} = 50\right] \times a^2$$

$$a^4 - 50a^2 + 49 = 0$$

$$(a^2 - 49)(a^2 - 1) = 0$$



$either \quad a^2 = 49 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow b = \frac{7}{a} = \frac{7}{7} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow b^2 = 1$

$or \quad a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = \frac{7}{a} = \frac{7}{1} \Rightarrow b = 7$ يهمل

معادلة القطع الناقص $\boxed{\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1}$

- لأن قيمة (a) يجب ان تكون أكبر من قيمة (b) في القطع الناقص .





الفصل الثالث

تطبيقات التفاضل

تطبيقات التفاضل

القواعد الاساسية للمشتقة (مراجعة)

القاعدة الأولى : مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفر

$$1)\ f(x) = 3 \Rightarrow \acute{f}(x) = 0$$

$$2)\ f(x) = \frac{2}{5} \Rightarrow \acute{f}(x) = 0$$

القاعدة الثانية : اذا كان $f(x) = x^n$ فإن $\acute{f}(x) = nx^{n-1}$

$$1)\ fx = x^3 \Rightarrow \acute{f}(x) = 3x^2$$

$$2)\ f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

القاعدة الثالثة : اذا كان $f(x) = ax^n$ فإن $\acute{f}(x) = anx^{n-1}$

$$1)\ f(x) = 6x^4 \Rightarrow \acute{f}(x) = 24x^3$$

$$2)\ f(x) = 7\sqrt{x} = 7x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \acute{f}(x) = 7(\frac{1}{2})x^{\frac{-1}{2}} = \frac{7}{2\sqrt{x}}$$

$$3)\ f(x) = -5x^{-3} \Rightarrow \acute{f}(x) = 15x^{-4} = \frac{15}{x^4}$$

القاعدة الرابعة : مشتقة مجموع دوال يساوي مجموع مشتقاتها

$$1)\ f(x) = x^3 + 7x \Rightarrow \acute{f}(x) = 3x^2 + 7$$

$$2)\ f(x) = 6x^4 + \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = 6x^4 + x^{-1} \Rightarrow \acute{f}(x) = 24x^3 - x^{-2} = 24x^3 - \frac{1}{x^2}$$

القاعدة الخامسة : (مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الأولى × مشتقة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الأولى)

$$f(x) = (4x^3 + 7x)(2x) \Rightarrow \acute{f}(x) = (4x^3 + 7x)(2) + (2x)(12x^2 + 7) = 8x^3 + 14x + 24x^3 + 14x$$

القاعدة السادسة : مشتقة قسمة دالتين = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

$$f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^4 + 1} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(x^4 + 1)(6x^2) - (2x^3 + 1)(4x^3)}{(x^4 + 1)^2} = \frac{6x^6 + 6x^2 - 8x^6 - 4x^3}{(x^4 + 1)^2}$$

القاعدة السابعة : مشتقة مجموعة دوال مرفوعة لأس معين اذا كان $f(x) = [g(x)]^n$ فإن

$$\acute{f}(x) = n[g(x)]^{n-1}.\acute{g}(x)$$

$$1)\ f(x) = (4x^3 + 7x)^5 \Rightarrow \acute{f}(x) = 5(4x^3 + 7x)^4\ .12x^2 + 7$$

$$2)\ f(x) = x^2\sqrt{4x^3 + 2x} \Rightarrow f(x) = x^2(4x^3 + 2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\acute{f}(x) = x^2[\frac{1}{2}(4x^3+2x)^{-\frac{1}{2}}(12x^2+2)] + (4x^3+2x)^{\frac{1}{2}}.(2x)$$

$$= \frac{x^2(12x^2+2)}{2(4x^3+2x)^{\frac{1}{2}}} + 2x\,(4x^3+2x)^{\frac{1}{2}}$$

القواعد الاساسية لأشتقاق الدوال الدائرية :

1) $f(x) = \sin y \Rightarrow \acute{f}(x) = \cos(y).\frac{dy}{dx}$

2) $f(x) = \cos y \Rightarrow \acute{f}(x) = -\sin(y).\frac{dy}{dx}$

3) $f(x) = \tan y \Rightarrow \acute{f}(x) = \sec^2(y).\frac{dy}{dx}$

4) $f(x) = \cot y \Rightarrow \acute{f}(x) = -\csc^2(y).\frac{dy}{dx}$

5) $f(x) = \sec y \Rightarrow \acute{f}(x) = \sec y \tan y.\frac{dy}{dx}$

6) $f(x) = \csc y \Rightarrow \acute{f}(x) = -\csc y \cot y.\frac{dy}{dx}$

بعض العلاقات والقوانين المهمة :

1) $\sin^2x + \cos^2x = 1$	2) $\cos(2x) = \cos^2x - \sin^2x$	3) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
4) $\csc = \frac{1}{\sin x}$	5) $\sec = \frac{1}{\cos x}$	6) $\cot = \frac{1}{\tan x}$
7) $\tan^2x + 1 = \sec^2x$	8) $\cot^2x + 1 = \csc^2x$	
8) $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$		
9) $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$		

مثال : جد مشتقة ما يأتي :

1) $f(x) = \sqrt{\sin x} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

$$\frac{\text{مشتقة داخل الجذر التربيعي ....}}{(\text{دليل الجذر})\sqrt{(x)^{\text{الدليل}-1}}}$$

2) $f(x) = \sin^2x = (\sin x)^2 \Rightarrow \acute{f}(x) = 2\sin x.(\cos x)$

3) $f(x) = \sin x \cos x \Rightarrow \acute{f}(x) = \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x)$

$$= -\sin^2x + \cos^2x = \cos^2x - \sin^2x = \cos(2x)$$

4) $f(x) = \tan x - x \Rightarrow \acute{f}(x) = \sec^2x - 1 = (\tan^2x + 1) - 1 = \tan^2x$

المشتقات ذات الرتب العليا

اذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق فإن مشتقتها الاولى هي $\acute{y} = \frac{dy}{dx} = \acute{f}(x)$ وهي دالة جديدة والدالة الجديدة $\acute{f}(x)$ اذا توافرت فيها شروط الاشتقاق فإن مشتقتها دالة تمثل المشتقة الثانية ويرمز لها $\acute{\acute{y}} = \frac{d^2y}{dx^2} = \acute{\acute{f}}(x)$ وهذه الاخيرة أيضا دالة جديدة واذا توافرت فيها شروط الاشتقاق فإن مشتقتها تسمى المشتقة الثالثة ويرمز لها $\acute{\acute{\acute{y}}} = \frac{d^3y}{dx^3} = \acute{\acute{\acute{f}}}(x)$ وهكذا يمكن ايجاد مشتقات متتالية وبدءا من المشتقة الثانية ويطلق على هذه المشتقات بالمشتقات العليا . وتكتب المشتقة من الرتبة n كما يلي : $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ حيث n عدد صحيح موجب

ملاحظات عامة :

اذا كانت $[s = f(x)]$ حيث (s) تمثل ازاحة الجسم عند اي زمن (t) لذا فإن :

١- $\frac{ds}{dt} = \acute{f}(t)$ المشتقة الأولى وهي تمثل السرعة اللحظية للجسم ويرمز لها بالرمز (v) .

٢- $\frac{d^2s}{dt^2} = \acute{\acute{f}}(t)$ المشتقة الثانية وهي تمثل التعجيل للجسم (معدل تغيير السرعة) ويرمز لها بالرمز (g) .

٣- $\frac{d^3s}{dt^3} = \acute{\acute{\acute{f}}}(t)$ المشتقة الثالثة وهي تمثل معدل التغير الزمني للتعجيل .

المشتقة الضمنية

اذا كانت $y = f(x)$ دالة بدلالة x فعند اشتقاق معادلة بدلالة x و y بالنسبة الى x نضيف $\acute{y}$ أو $\frac{dy}{dx}$ بعد كل مشتقة لـ y وتستخدم المشتقة الضمنية عندما يكون قيمة اس y أكبر من واحد كما ياتي :

مثال : اذا كانت $y = cos2x$ فجد $\frac{d^4y}{dx^4}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{-2\sin 2x} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -2\,cos2x\,.(2) = \boxed{-4\,cos2x}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \boxed{8\sin 2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \boxed{16\,cos2x}$$

مثال : اذا كانت $y^2 + x^2 = 1$ فأثبت أن $y\frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^2 + 1 = 0$

الحل : نشتق العلاقة المعطاة اشتقاقا ضمنيا بالنسبة الى x

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \;\;] \div 2$$

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0 \Rightarrow y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\,.\,\frac{dy}{dx} + 1 = 0 \Rightarrow y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

مثال : لتكن $xy-13=0$ حيث $x\neq 0\,,y\neq 0$ فجد المشتقة الثانية .

الحل :

$$x\frac{dy}{dx}+y-0=0\Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}.(1)+\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow xy''=-2y'$$

$$\therefore y''=\frac{-2y'}{x}$$

مثال : اذا كانت $y=cos^2x-sin^2x$ اثبت ان $y''=-4\,cos^2x$

الحل : $y=cos^2x-sin^2x\Rightarrow y=cos2x$

$$y'=-\,sin2x\,.(2)=-2\,sin2x\ \Rightarrow\ y''=-2\cos 2x\,.(2)=-4\cos 2x$$

مثال : جد y'''' للدالة $f(x)=x^5+2\,x^3+3x+1$

الحل :

$$\acute{y}=5x^4+6x^2+3$$

$$\acute{\acute{y}}=20x^3+12x$$

$$y'''=60x^2+12$$

$$y''''=120x$$

مثال : اذا كانت $y=sin^4x$ اثبت ان $\frac{d^2y}{dx^2}+16y=12sin^2x$

الحل :

$$y=sin^4x\Rightarrow y=[sin\,x]^4$$

$$\frac{dy}{dx}=4[sin\,x]^3.[\cos x]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4[sin\,x]^3.(-sinx)+(cosx).(12sin^2x).(\cos x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-4sin^4x+12\,sin^2x\,cos^2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-4sin^4x+12\,sin^2x\,(1-sin^2x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-4sin^4x+12\,sin^2x-12sin^4x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-16\,sin^4x+12\,sin^2x$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}+16sin^4x=12\,sin^2x\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}+16y=12sin^2x$$

مثال : جد y' للدوال الاتية :

1) $f(x) = \sin(2x^2 + x + 3) \Rightarrow y' = (4x + 1)\cos(2x^2 + x + 3)$

2) $f(x) = \cot\sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \underbrace{\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^2}}}_{\text{مشتقة الزاوية}} \csc^2\sqrt[3]{x}$

3) $f(x) = \sec\frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2}\sec\frac{1}{x}\tan\frac{1}{x}$

4) $f(x) = \cos x \tan x \Rightarrow y' = \cos x \,.\, \sec^2 x + \tan x\,.(-\sin x) = \cos x\,.\,\sec^2 x - \tan x\,.\sin x$

مثال : جد y' للدوال الاتية :

اذا كانت الدالة مرفوعة لقوة نضع القوة خارج القوس الكبير ثم نشتق الدالة حسب الدالة القوسية

1) $f(x) = \sin^3(\pi x^2 + 3x + 2)$

$f(x) = [\sin(\pi x^2 + 3x + 2)]^3$

$f'(x) = 3[\sin(\pi x^2 + 3x + 2)]^2 \cos(\pi x^2 + 3x + 2)(2\pi x + 3)$

2) $f(x) = \cos^{-4}x^2 \Rightarrow f(x) = [\cos x^2]^{-4} \Rightarrow y' = -4[\cos x^2]^{-5}.(-\underbrace{2x}_{\text{مشتقة الزاوية}} \sin x^2)$

3) $f(x) = \sec^{\frac{2}{3}} x^2 \Rightarrow f(x) = [\sec x^2]^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{2}{3}[\sec x^2]^{\frac{-1}{3}} \,.\, (\sec x^2 \tan x^2)\left(\underbrace{2x}_{\text{مشتقة الزاوية}}\right) = \frac{4x}{3}[\sec x^2]^{\frac{-1}{3}}(\sec x^2 \tan x^2)$

مثال : جد y' للدوال الاتية :

1) $\sin(xy) = x^2 + 3y \Rightarrow \cos xy[xy' + y(1)] = 2x + 3y'$

$xy'\cos xy + y\cos xy = 2x + 3y'$

$xy'\cos xy - 3y' = 2x - y\cos xy$

$y'(x\cos xy - 3) = 2x - y\cos xy \Rightarrow y' = \frac{2x - y\cos xy}{x\cos xy - 3}$

2) $\sqrt{\tan x} = 2y^2 + x$

$\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}} = 4yy' + 1 \Rightarrow \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}} - 1 = 4yy' \Rightarrow y' = \frac{\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}} - 1}{4y}$

مثال : جد y' لما يأتي : $y = (\sin x + \cos x)^2$

$\frac{dy}{dx} = 2(\sin x + \cos x)^1 \underbrace{(\cos x - \sin x)}_{\text{مشتقة داخل القوس}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)$

$\frac{dy}{dx} = 2(\sin^2 x - \cos^2 x)$ $\quad$ $\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$

$\frac{dy}{dx} = 2\cos 2x$

حل تمارين (1 – 3)

س1 : جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :

a) $y = \sqrt{2-x} \quad , \quad \forall x < 2$

$$y = (2-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}.(-1) = -\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4}(2-x)^{-\frac{3}{2}}.(-1) = \frac{-1}{4(2-x)^{\frac{3}{2}}}$$

b) $y = \frac{2-x}{2+x} \quad , \quad x \neq -2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2+x).(-1)-(2-x).(1)}{(2+x)^2} = \frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2} = \frac{-4}{(2+x)^2} = -4\,(2+x)^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8\,(2+x)^{-3}.(1) = \frac{8}{(2+x)^3}$$

c) $2xy - 4y + 5 = 0 \quad , \quad y \neq 0 \ , \ x \neq 2$

$$y\,(2x-4) = -5 \Rightarrow y = \frac{-5}{(2x-4)} = -5\,(2x-4)^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5\,(2x-4)^{-2}.2 = 10\,(2x-4)^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -20\,(2x-4)^{-3}.2 = \frac{-40}{(2x-4)^3}$$

س2 : جد $f'''(1)$ لكل مما يأتي :

a) $f(x) = 4\sqrt{6-2x} \quad \forall x < 3$

$$f(x) = 4\,(6-2x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)(6-2x)^{-\frac{1}{2}}.(-2) = -4(6-2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -4\left(-\frac{1}{2}\right)(6-2x)^{-\frac{3}{2}}.(-2) = -4(6-2x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{12}{2}\,(6-2x)^{-\frac{3}{2}-1}.(-2) = -12(6-2x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{-12}{(6-2x)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f'''(1) = \frac{-12}{(6-2(1))^{\frac{5}{2}}} = \frac{-12}{(4)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-12}{(2^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-12}{32} = \frac{-3}{8}$$

b) $f(x) = \sin \pi x$

$$f'(x) = \cos \pi x\,.(\pi) = \pi \cos \pi x \ , \ f''(x) = -\pi \sin \pi x\,.(\pi) = -\pi^2 \sin \pi x$$

$$\dddot{f}(x) = -\pi^2 \cos \pi x \ (\pi) = -\pi^3 \cos \pi x$$

$$\dddot{f}(1) = -\pi^3 cos\pi \ (1) = -\pi^3(-1) = \pi^3$$

c) $f(x) = \frac{3}{2-x} \ , x \neq 2$

$$f(x) = 3(2-x)^{-1} \implies \acute{f}(x) = -3(2-x)^{-2} . (-1) = 3(2-x)^{-2}$$

$$\ddot{f}(x) = -6(2-x)^{-3} . (-1) = 6(2-x)^{-3}$$

$$\dddot{f}(x) = -18(2-x)^{-4}(-1) = 18(2-x)^{-4} = \frac{18}{(2-x)^4}$$

$$\therefore \dddot{f}(1) = \frac{18}{(2-1)^4} = 18$$

س3 : اذا كانت $y = tan\ x$ فبرهن ان $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+ y^2)$ حيث $n \in z$, $x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = [secx]^2 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2 [secx]. secx \ tanx = 2 \ tanx \ sec^2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \ tanx (1 + tan^2x) = 2y(1 + y^2)$$

س4/ اذا كانت $y = x \ sinx$ فبرهن ان : $y^{(4)} - y + 4 \ cosx = 0$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = x . cosx + sinx (1) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x \ cosx + sinx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x.(-sinx) + cosx.(1) + cosx = -x \ sinx + 2 \ cosx$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -x \ cosx + sinx(-1) - 2 \ sinx = -x \ cosx - sinx - 2sinx$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -x(-sinx) + cosx.(-1) - cosx - 2 \ cosx$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = x \ sinx - cosx - cosx - 2 \ cosx = x \ sinx - 4 \ cosx$$

$$L.S.H = y^{(4)} - y + 4 \ cosx = x \ sinx - 4 \ cosx - x \ sinx + 4 \ cosx = 0 = R.S.H$$

المعدلات المرتبطة بالزمن (المعدلات الزمنية)

اذا وجد اكثر من متغير بحيث تتوقف كل من هذه المتغيرات على متغير واحد ومثاله الزمن فتتغير كل المتغيرات تبعا لتغيره حيث هنا يكون الاشتقاق دائما بالنسبة للزمن $y = g(t)\ ,\ x = f(t)$ ، فمنها المتغيرات $x\ ,y$ متغيرين تابعين كل منهما مرتبط بالمتغير المستقل (t) .

ملاحظات لحل اي سؤال يتعلق بالمعادلات المرتبطة بالزمن نتبع ما يأتي :

١- سوف تقسم العلاقات الى نوعين (علاقات اساسية) وهي علاقات يتم اشتقاقها و (علاقات ثانوية) وهي علاقة يتم من خلالها تقليص عدد المتغيرات في السؤال .

٢- الثابت الدائم يعوض قبل الاشتقاق والمتغير الدائم يعوض بعد الاشتقاق واحيانا نقوم بتعويضه قبل الاشتقاق وذلك لايجاد قيمة متغير دائم آخر .

٣- كلمة معدل أو سرعة أو بعد من الابعاد يكون معناه الاتي : $\frac{d(\text{اسم البعد})}{dt}$ ويكون موجبا في حالة التزايد وسالبا في حالة التناقص .

٤- عند الاشتقاق بالنسبة الى الزمن يكون كالاتي : معدل تغير الحجم $\frac{dv}{dt}$ أو معدل تغير نصف القطر $\frac{dr}{dt}$ الخ .

٥- اذا طلب في السؤال معدل تغير قانون لشكل هندسي فإن ذلك القانون يكون علاقة اساسية .

مثال : مكعب من الثلج يذوب بالحرارة بحيث يحافظ على شكله مكعبا فإذا كان معدل تغير حجمه يساوي $3\ cm^3/s$ جد معدل تغير مساحته السطحية في اللحظة التي يكون طول حرفه $8\ m$.

الحل :

نفرض طول ضلع المكعب $= L$ ، نفرض حجم المكعب $= v$ ، نفرض المساحة السطحية $= A$

معدل التغير بالمساحة $= \frac{dA}{dt}$ ، معدل التغير بالحجم $= \frac{dv}{dt}$ ، معدل التغير الطول $= \frac{dL}{dt}$

حجم المكعب = $\left(\text{طول الضلع}\right)^3$ ، $v = L^3$

$$\frac{dv}{dt} = 3L^2\frac{dL}{dt} \Rightarrow -3 = 3(8)^2\frac{dL}{dt} \Rightarrow -1 = 64\frac{dL}{dt} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{-1}{64}$$

المساحة السطحية للمكعب = $6 \times \left(\text{طول الضلع}\right)^2$ ، $A = 6\ L^2$

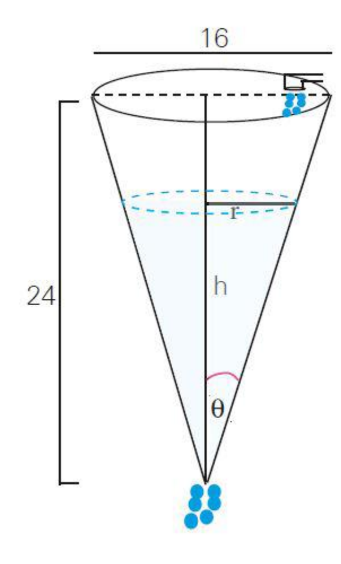
معدل تغير المساحة السطحية $\frac{dA}{dt} = 12\ L\ \frac{dL}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 12\ (8)\ \left(\frac{-1}{64}\right) = \frac{-3}{2}\ m^2/s$

أو تكتب كالاتي : معدل نقصان المساحة السطحية $\frac{dA}{dt} = \frac{3}{2}\ m^2/s$

سؤال واجب : يندفع غاز داخل بالون كروي بمعدل $4\ m^3/s$ فاذا كان البالون فيه ثقب يتسرب منه الغاز بمعدل $0.5\ m^3/s$ بحيث يحافظ على شكله كرويا جد معدل تغير مساحته السطحية عندما يكون نصف قطر البالون مترا واحدا . (الجواب : 7)

مثال : مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه للاسفل ارتفاعه يساوي $24\ cm$ وطول قطر قاعدته $16\ cm$ يصب فيه سائل بمعدل $5cm^3/s$ بينما يترسب من السائل بمعدل $1\ cm^3/s$ جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل $12\ cm$.

الحل :



نفرض نصف القطر القاعدة $= r$ ، نفرض حجم السائل $= v$

نفرض ارتفاع السائل $= h$ ، معدل تغير ارتفاع السائل $(\frac{dh}{dt} = ?)$

معدل تغير حجم السائل $= \frac{dv}{dt}$

المثلث الكبير $\tan\theta = \frac{r}{h} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

المثلث الصغير $\tan\theta = \frac{r}{h} \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{1}{3}h \ldots\ldots(1)$

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \ldots\ldots\ldots(2)$ نعوض معادلة (١) في معادلة (٢)

$$v = \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{3}h)^2 h \Rightarrow v = \frac{1}{27}\pi h^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{27}\pi(3)h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{9}\pi h^2\frac{dh}{dt} \ldots\ldots\ldots(3)$$

معدل تغير حجم السائل في المخروط = معدل الصب − معدل التسرب

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4\ cm^3/s}$$

نعوض معدل تغير الحجم في معادلة (3)

$$4 = \frac{1}{9}\pi(12)^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{(4)(9)}{144\pi} = \frac{1}{4\pi}\ cm/s$$

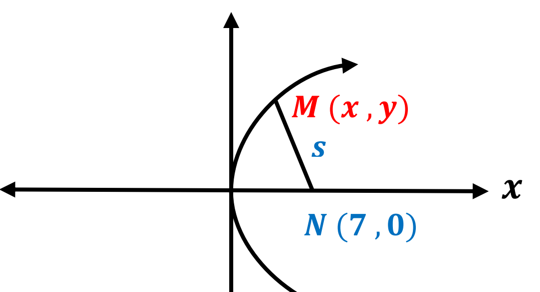
مثال : لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة $(7,0)$ يساوي $0.2\ unit/s$ جد معدل التغير الزمني للاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون $x = 4$. وزاري ٢٠١٧/د١

الحل : لتكن النقطة $M\ (x\ ,y) \in$ للقطع المكافئ

لتكن النقطة $N\ (7\ ,0)$

S المسافة بين $M\ ,N$

معدل الابتعاد $= \frac{ds}{dt}$ ، معدل تغير الاحداثي السيني $(\frac{dx}{dt} = ?)$



$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$S = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}$$ نعوض عن $\boxed{y^2 = 4x}$

$$S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x} \Rightarrow S = \sqrt{x^2 - 10x + 49}$$ نشتق

$$\frac{ds}{dt}=\frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+49}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

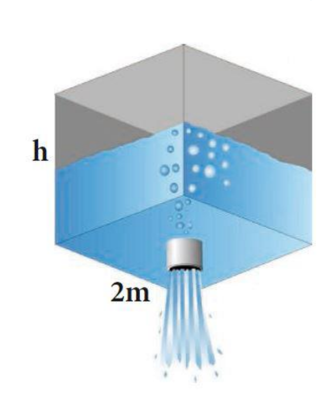
$0.2=\frac{2(4)-10}{2\sqrt{(4)^2-10(4)+49}}\cdot\frac{dx}{dt}\Rightarrow 0.2=\frac{-2}{2\sqrt{25}}\cdot\frac{dx}{dt}\Rightarrow 0.2\ =\frac{-2}{10}\frac{dx}{dt}\Rightarrow 0.2=-0.2\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{dx}{dt}=-1\ unit/s$

مثال : خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طولها $2\ m$ يتسرب منه الماء بمعدل $0.4m^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان عند أي زمن t . وزاري ٢٠١١/د١ ٢٠١٣/د٢

الحل : نفرض حجم الماء في الخزان $= v$ ، نفرض ارتفاع الماء في الخزان $= h$

نفرض مساحة القاعدة المربعة $= A$ ، طول ضلع القاعدة المربعة $= L$

معدل انخفاض الماء في الخزان $= \frac{dh}{dt}$ ، معدل تسرب الماء من الخزان $= \frac{dv}{dt}$



- ان الماء يأخذ شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة .

$\therefore\ \frac{dv}{dt}=\ -0.4$ تسرب (الاشارة السالبة تعني نقصان)

$$v=Ah\Rightarrow v=L\,.\,L\,h\Rightarrow v=(2)(2)h$$

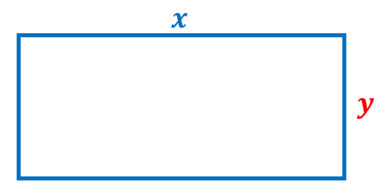
$$v=4h\overset{\text{نشتق}}{\Rightarrow}\frac{dv}{dt}\ =\ 4\frac{dh}{dt}$$

$$-0.4\ =\ 4\ \frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}\ =\frac{-0.4}{4}=\ -0.1\ \ m/h$$

معدل تغير انخفاض الماء في الخزان $= 0.1\frac{m}{h}$

مثال : صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها تساوي $96cm^2$ يتمدد طولها بمعدل $2\ cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها $8\ cm$. وزاري ٢٠١٤ / د٣ ٢٠١١ / د٢

الحل :



نفرض طول المستطيل $= x$

نفرض عرض المستطيل $= y$

معدل التغير بالطول $\frac{dx}{dt}=2cm/s$

معدل تغير العرض $\frac{dy}{dt}=?$

مساحة المستطيل $A=xy\Rightarrow 96\ =\ x\,y\ \ldots..(1)\ \Rightarrow 96\ =\ x\,(8)\Rightarrow x=\frac{96}{8}=12$

نشتق طرفي معادلة (١) بالنسبة الى الزمن t

$$0=x\frac{dy}{dt}\ +\ y\frac{dx}{dt}$$

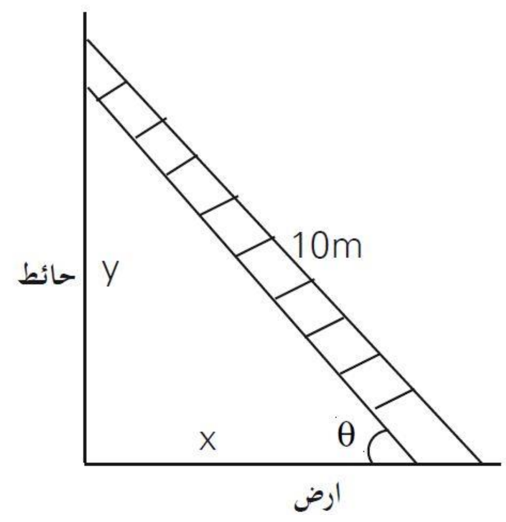
$$12\frac{dy}{dt}+8(2)=0\Rightarrow 12\frac{dy}{dt}=-16\Rightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{-16}{12}=-\frac{4}{3}\ cm/s$$

معدل التناقص في عرض المستطيل $= \frac{4}{3}cm/s$

مثال : سلم طوله $10\ m$ يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه العلوي على حائط راسي فإذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $2\ m/s$ عندما يكون الطرف الاسفل على بعد $8\ m$ عن الحائط جد :

١) معدل انزلاق الطرف العلوي ٢) سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض . وزاري ٢٠١٤/د٢ ٢٠١٢/د١

الحل :



بُعد الطرف الاسفل عن الحائط $= x$

بُعد الطرف الاعلى عن الارض $= y$

قياس الزاوية بين السلم والارض $= \theta$

معدل تغير بعد الطرف الاسفل عن الحائط : $\frac{dx}{dt} = 2$

معدل تغير بعد الطرف العلوي عن الارض : $\left(\frac{dy}{dt} = ?\right)$

سرعة تغير الزاوية : $\left(\frac{d\theta}{dt} = ?\right)$

$$1)\ x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow 64 + y^2 = 100 \Rightarrow y^2 = 36 \quad , \ x = 8 \Rightarrow y = 6$$

$x^2 + y^2 = 100$ نشتق الطرفين

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 2(8)(2) + 2(6)\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 32 + 12\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 12\frac{dy}{dt} = -32$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3} m/s$$

معدل انزلاق الطرف العلوي $= \frac{8}{3} m/s$

$$2)\ \sin\theta = \frac{y}{10} \overset{\text{نشتق}}{\Rightarrow} \cos\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$$

نعوض $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{10}$

$$\frac{x}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$$

نعوض القيم $x = 8$ ، $\frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3}$

$$\frac{8}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\left(\frac{-8}{3}\right) = \frac{-1}{3}\ rad/s$$ سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض

مثال : نقطة تتحرك على الدائرة $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ فاذا كان معدل تغير الاحداثي السيني لها $3cm/sec$ عند النقطة $p(1,2)$ جد معدل التغير في الاحداثي الصادي عند نفس النقطة .

الحل :

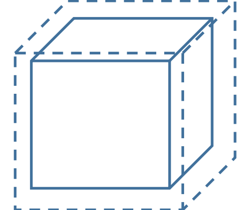
معدل تغير الاحداثي السيني $= \frac{dx}{dt}$ ، معدل تغير الاحداثي الصادي $= \frac{dy}{dt}$ ، النقطة $p(1,2)$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0 \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 4\frac{dx}{dt} - 6\frac{dy}{dt} + 0 = 0$$

$$2(1)(3)+2(2)\frac{dy}{dt}+4(3)-6\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow 6+4\frac{dy}{dt}+12-6\frac{dy}{dt}=0$$

$$18-2\frac{dy}{dt}=0 \Longrightarrow 18 = 2\frac{dy}{dt} \Longrightarrow \frac{dy}{dt}=9cm/sec$$

مثال : مكعب صلد طول حرفه $8\ cm$ مغطى بطبقة من الجليد بحيث شكله يبقى مكعب ، فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $6\ cm^3/s$ فجد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك $= 1cm$



الحل :

نفرض سمك الجليد $= x$

نفرض حجم الجليد $= v$

معدل نقصان سمك الجليد : $(\frac{dx}{dt}=?)$ ، سمك الجليد : $x = 1$

معدل تغير حجم الجليد : $\frac{dv}{dt} = -6cm^3/s$

حجم الجليد = حجم المكعب المغطى بالجليد − حجم المكعب الاصلي

$v=(8+2x)^3-(8)^3$ نشتق بالنسبة للزمن

$$\frac{dv}{dt}=3(8+2x)^2.(2)\frac{dx}{dt}-0 \Rightarrow -6=6\big(8+2(1)\big)^2\frac{dx}{dt} \Rightarrow -1=(10)^2\frac{dx}{dt}$$

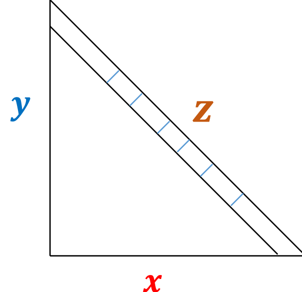
$$\frac{dx}{dt}=\frac{-1}{100}\ cm/s$$

معدل النقصان في سمك الجليد $= 0.01cm/s$

حل تمارين (2 – 3)

س1 : سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 2m/s فجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$.

الحل :



بُعد الطرف الاسفل عن الحائط $= x$

بُعد الطرف الاعلى عن الارض $= y$

قياس الزاوية بين السلم والارض $= \frac{\pi}{3}$

معدل تغير بعد الطرف الاسفل عن الحائط : $\frac{dx}{dt}=2$

معدل تغير بعد الطرف العلوي عن الارض : $\left(\frac{dy}{dt}=?\right)$

$z^2 = x^2 + y^2$ نشتق بالنسبة للزمن t

$$0=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}\ldots\ldots\ldots(1)$$

$\tan\theta=\frac{y}{x} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{3}=\frac{y}{x} \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{y}{x} \Rightarrow y=\sqrt{3}\,x$ نعوض في معادلة (١)

$$2x(2)+2\sqrt{3}\,x\,\frac{dy}{dt}=0$$

$$4x+2\sqrt{3}\,x\,\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow 2\sqrt{3}\,x\,\frac{dy}{dt}=-4x \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-4x}{2\sqrt{3}\,x} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-2}{\sqrt{3}}\ m/s$$

س2 : عمود طوله $7.2\ m$ في نهايته مصباح يتحرك رجل طوله $1.8\ m$ مبتعدا عن العمود وبسرعة $30\ m/min$ جد معدل تغيير طول ظل الرجل . وزاري ٢٠١٣ / د١

الحل :

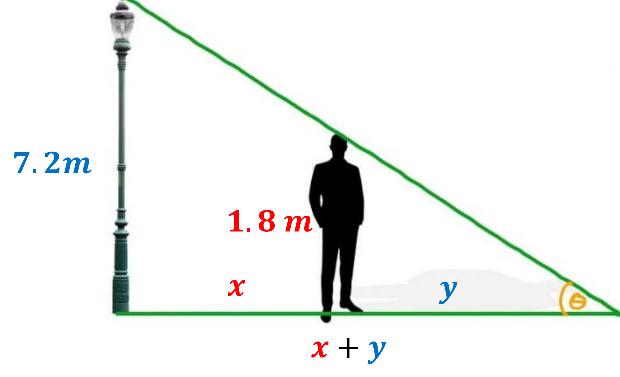
نفرض بعد الرجل عن العمود $= x$

نفرض طول ظل الرجـــــــل $= y$

من استعمال (tan) او من تشابه المثلثين نحصل على

معدل تغيير طول ظل الرجل : $(\frac{dy}{dt}=?)$

معدل تغير بعد الرجل عن العمود : $\frac{dx}{dt}=30$



في المثلث الكبير $tan\,\theta=\frac{7.2}{x+y}$

في المثلث الصغير $tan\,\theta=\frac{1.8}{y}$

$$\frac{7.2}{x+y}=\frac{1.8}{y} \Rightarrow \frac{4}{x+y}=\frac{1}{y}$$

$4y=x+y \Rightarrow 3y=x$ نشتق بالنسبة للزمن t

$$3\,\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt} \Rightarrow 3\,\frac{dy}{dt}=30 \Rightarrow \frac{dy}{dt}=10\ m/min$$ معدل تغيير طول ظل الرجل

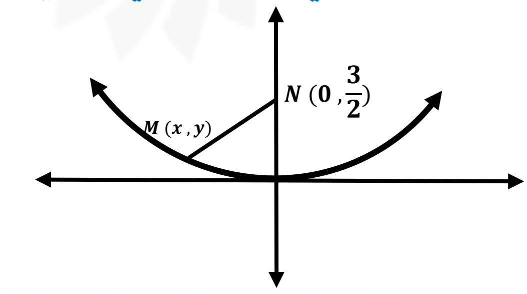
س3 : لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y=x^2$ جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لأبتعادها عن النقطة $(0\,,\frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M . وزاري ٢٠١٢/د٢

الحل :

لتكن النقطة $M(x\,,y)\in$ للقطع المكافئ ، ملاحظة : $\frac{ds}{dt}=\frac{2}{3}\frac{dy}{dt}$ ، ثلث $=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

لتكن النقطة $N(0\,,\frac{3}{2})$ ، S المسافة بين M , N ، معدل الابتعاد : $\frac{ds}{dt}$

المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M $=\frac{dy}{dt}$



$$\overline{MN}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$S=\sqrt{(x-0)^2+(y-\frac{3}{2})^2}$$

نضع $\boxed{y = x^2}$ $\qquad S = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$

$$S = \sqrt{y + (y^2 - 3y + \frac{9}{4})} \Rightarrow S = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2y\frac{dy}{dt} - 2\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{dy}{dt} = \frac{2\ \frac{dy}{dt}(y-1)}{2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{(y-1)}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}$$

$2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}} = 3(y-1)$ بتربيع الطرفين

$$4(y^2 - 2y + \tfrac{9}{4}) = 9(y^2 - 2y + 1)$$

$$4y^2 - 8y + 9 = 9y^2 - 18y + 9 \Rightarrow 4y^2 - 9y^2 - 8y + 18y + 9 - 9 = 0$$

$$[-5y^2 + 10y = 0] \div (-5) \Rightarrow y^2 - 2y = 0$$

$$y(y-2) = 0$$

أما $y = 0 \Rightarrow x = 0$ $\qquad$ تهمل $(0,0)$

أو $y = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2}$ $\qquad \therefore M(\mp\sqrt{2}, 2)$

س4: جد النقطة التي تنتمي للدائرة $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$ والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغير x يساوي المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t . وزاري ٢٠١٢ /د٣

الحل :

$\frac{dx}{dt}$ معدل التغير الزمني لـ x ، $\frac{dy}{dt}$ معدل التغير الزمني لـ y ، $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 4\frac{dx}{dt} - 8\frac{dy}{dt} = 0$ $\qquad$ نعوض بدل كل $\frac{dx}{dt}$ بـ $\frac{dy}{dt}$

$$2x\frac{dy}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 4\frac{dy}{dt} - 8\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt}(2x + 2y + 4 - 8) = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 2x + 2y + 4 - 8 = 0 \Rightarrow [2x + 2y - 4 = 0] \div 2$$

$x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 - x \ldots\ldots(2)$ $\qquad$ نعوضها في معادلة الدائرة (1)

$$x^2 + (2-x)^2 + 4x - 8(2-x) = 108$$

$$x^2 + 4 - 4x + x^2 + 4x - 16 + 8x - 108 = 0$$

$$[2x^2 + 8x - 120 = 0\,] \div 2 \Rightarrow x^2 + 4x - 60 = 0 \Rightarrow (x+10)\,(x-6) = 0$$

اما $\quad x = -10 \quad (2)$ نعوضها في

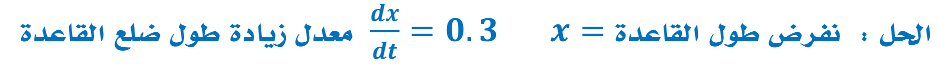
$$y = 2 + 10 = 12 \Rightarrow (-10\,,12\,)$$

أو $\quad x = 6 \quad (2)$ نعوضها في

$$y = 2 - 6 = -4 \Rightarrow (6,-4)$$

∴ النقطتان هما $(-10\,,12\,)\,,(\,6,-4\,)$

س5 : متوازي سطوح مستطيلة ابعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل ، يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $(0.3\ cm/s)$ وارتفاعه يتناقص بمعدل $(0.5\ cm/s)$ جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول القاعدة $4\ cm$ والارتفاع $3\ cm$.



الحل : نفرض طول القاعدة $= x$ $\quad \frac{dx}{dt} = 0.3$ معدل زيادة طول ضلع القاعدة

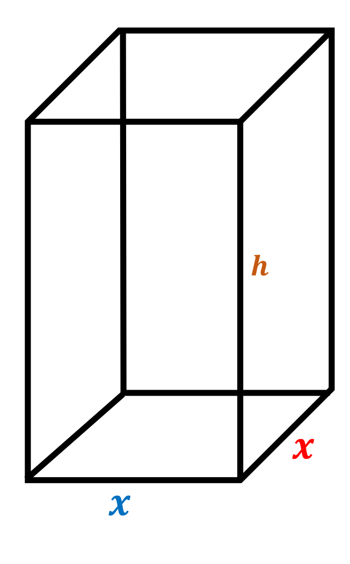
نفرض الارتفاع $= h$ $\quad \frac{dh}{dt} = 0.5$ معدل نقصان ارتفاعه

نفرض الحجم $= v$

∴ الحجم = الطول × العرض × الارتفاع



∵ القاعدة مربعة فيكون الطول والعرض متساويين



$$\therefore v = x^2.h$$

$$\frac{dv}{dt} = x^2.\frac{dh}{dt} + h.2x\,\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = (4)^2(\,-0.5) + (\,3)(2)(4)(0.3)$$

$$\frac{dv}{dt} = 16(-0.5) + 7.2 = -8 + 7.2 = -0.8\ \text{cm}^3/\text{s}$$

حلول الاسئلة الوزارية حول المعدلات المرتبطة

سؤال وزاري ١٩٩٦ / د١ : جد نقطة على الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 - 4x = 4$ يكون عندها معدل إزدياد y مساويا لمعدل إزدياد x .

الحل : $\quad \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$ ، $\frac{dx}{dt}$ معدل التغير الزمني لـ x ، $\frac{dy}{dt}$ معدل التغير الزمني لـ y

$$x^2 + y^2 - 4x = 4 \;\ldots\ldots(1)$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt} - 4\,\frac{dx}{dt} = 0$$

نضع $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$

$$\left[2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dx}{dt} - 4\frac{dx}{dt} = 0\right] \div 2$$

$$\frac{dx}{dt}[x + y - 2 = 0] \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0$$

$\therefore\ x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 - x \ldots\ldots\ldots(2)$ نعوض في معادلة الدائرة (١)

$$x^2 + (2-x)^2 - 4x = 4 \Rightarrow x^2 + 4 - 4x + x^2 - 4x = 4$$

$$2x^2 - 8x = 0] \div 2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0$$

$either\ x = 0 \Rightarrow y = 2 - 0 \Rightarrow y = 2$ النقطة $(0, 2)$

$or\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 2 - 4 \Rightarrow y = -2$ النقطة $(4, -2)$

سؤال وزاري ١٩٩٧/ د١ : سيارة تسير بسرعة $(30\ m/s)$ أجتازت أشارة مرورية حمراء إرتفاعها $(3\ m)$ عن سطح الارض وبعد أن أبتعدت عنها مسافة $(3\sqrt{3}\ m)$ أصطدمت بسيارة أخرى نتيجة عدم الالتزام بقوانين المرور جد سرعة تغير المسافة بين السيارة والاشارة الضوئية .



الحل : $y = 3\sqrt{3}\ m$ ، $\frac{dx}{dt} = 30\ m/s$ معدل تغير سرعة السيارة

$\frac{dy}{dt} = ?$ معدل تغير المسافة بين السيارة والاشارة

$$y^2 = x^2 + 9$$

$$(3\sqrt{3})^2 = x^2 + 9 \Rightarrow 27 = x^2 + 9$$

$$x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

$$[2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}] \div 2$$

$$3\sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 3\sqrt{2}(30) \Rightarrow \therefore \frac{dy}{dt} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ m/s$$

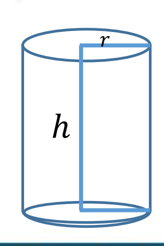
سؤال وزاري ٢٠٠٠ / د٢ : اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل $(0.5\ cm/s)$ بحيث يظل حجمها دائما مساويا $(320\pi\ cm^3)$ جد معدل تغير نصف قطر القاعدة عندما يكون الارتفاع $5\ cm$.

الحل :

$v = 320\pi\ cm^3$ الحجم ، $h = 5\ cm$ الارتفاع ، $\frac{dr}{dt} = ?$ معدل تغير نصف القطر

$\frac{dh}{dt} = 0.5\ cm/s$ معدل تغير الارتفاع

$v = \pi r^2 h \Rightarrow 320\pi = \pi r^2 h \Rightarrow \boxed{320 = r^2 h}$ العلاقة



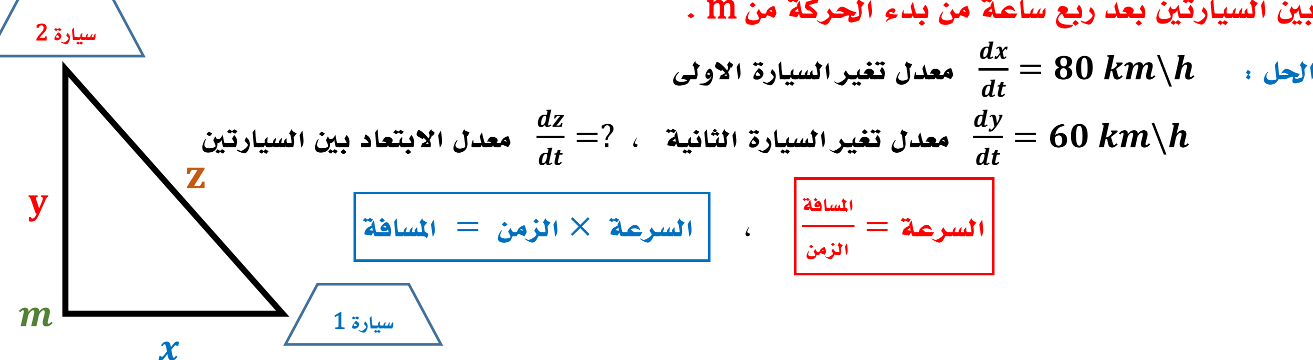
$$320 = (5)\, r^2 \Rightarrow r^2 = 64 \Rightarrow r = 8\ cm$$

$$320 = r^2 h \overset{\text{نشتق}}{\Longrightarrow} 0 = r^2\frac{dh}{dt} + h \,.\, 2r \,.\, \frac{dr}{dt}$$

$$(8)^2.(0.5) + 5.(2\times 8).\frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow 64.(0.5) + 5.(16).\frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow 32 + 80\frac{dr}{dt} = 0$$

$$80\frac{dr}{dt} = -32 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-32}{80} = \frac{-2}{5}\ cm/s$$

سؤال وزاري ٢٠٠٩/ د١ : طريقان متعامدان يلتقيان في m . تحركت سيارتان من نقطة m كل منهما في طريق وكان معدل سرعة السيارة الاولى 80 km/h ومعدل سرعة السيارة الثانية 60 km/h . جد معدل الابتعاد بين السيارتين بعد ربع ساعة من بدء الحركة من m .



الحل : $\frac{dx}{dt} = 80\ km\backslash h$ معدل تغير السيارة الاولى

$\frac{dy}{dt} = 60\ km\backslash h$ معدل تغير السيارة الثانية ، $\frac{dz}{dt} = ?$ معدل الابتعاد بين السيارتين

السرعة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$ ، المسافة = الزمن × السرعة

المسافة التي قطعتها السيارة الاولى بعد ربع ساعة $(x) = 80 \times \frac{1}{4} = 20\ km$

المسافة التي قطعتها السيارة الثانية بعد ربع ساعة $(y) = 60 \times \frac{1}{4} = 15\ km$

$x = 20 \ , y = 15$ فيثاغورس $z^2 = x^2 + y^2$

$$z^2 = (20)^2 + (15)^2 = 400 + 225 = 625 \Rightarrow z^2 = 625 \Rightarrow z = 25$$

$$2z.\frac{dz}{dt} = 2x.\frac{dx}{dt} + 2y.\frac{dy}{dt}] \div 2$$

$$z.\frac{dz}{dt} = x.\frac{dx}{dt} + y.\frac{dy}{dt}$$

$$25\frac{dz}{dt} = 20\,(80) + 15\,(60)$$

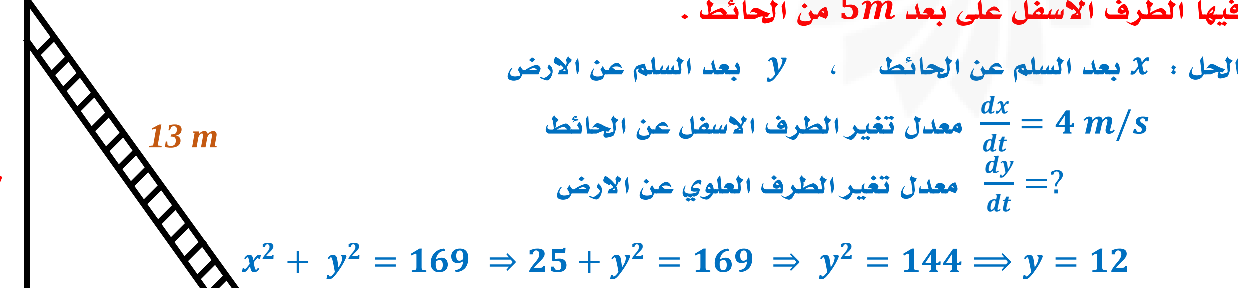
$$25\frac{dz}{dt} = 1600 + 900 \Rightarrow 25\frac{dz}{dt} = 2500 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2500}{25} = 100\ km\backslash h$$

سؤال وزاري ٢٠٠٩/ د٢ : سلم طوله (13 m) يرتكز على حائط شاقولي ، فإذا كان تحرك الطرف الاسفل للسلم مبتعداً عن الحائط بمعدل 4 m/s . جد معدل أنزلاق الطرف الاعلى للسلم عن الارض في اللحظة التي يكون فيها الطرف الاسفل على بعد 5m من الحائط .

الحل : x بعد السلم عن الحائط ، y بعد السلم عن الارض

$\frac{dx}{dt} = 4\ m/s$ معدل تغيير الطرف الاسفل عن الحائط

$\frac{dy}{dt} = ?$ معدل تغيير الطرف العلوي عن الارض



$$x^2 + y^2 = 169 \Rightarrow 25 + y^2 = 169 \Rightarrow y^2 = 144 \Rightarrow y = 12$$

$$m2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0\,] \div 2$$

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 5\,(4) + 12\frac{dy}{dt} = 0$$

$$20 + 12\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 12\frac{dy}{dt} = -20 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-20}{12} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-5}{3}\,m/s$$

س وزاري ٢٠١٨ / د١ : يراد ملئ خزان على شكل مخروط دائري قائم رأسه الى الاسفل ، طول نصف قطر قاعدته يساوي $(5\,m)$ والارتفاع يساوي $(10\,m)$ ، فاذا كان معدل ملئ الماء $2\,m^3/min$ ، جد سرعة ارتفاع الماء عندما يكون ارتفاع الماء يساوي $(6\,m)$.

الحل : نفرض نصف قطر المخروط $= r$ ، نفرض الارتفاع $= h$ ، نفرض الحجم $= v$

$\frac{dy}{dt}$ معدل الحجم (ملئ الماء) ، $\frac{dh}{dt}$ معدل الارتفاع

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \;\dots\dots\dots (1)$$

المثلث الكبير $\tan\theta = \frac{r}{h} = \frac{5}{10} \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{2}$

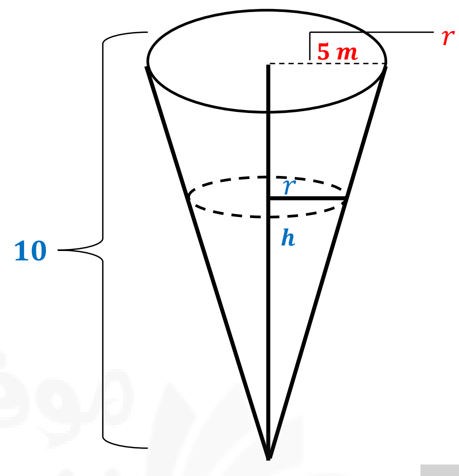
المثلث الصغير $\tan\theta = \frac{r}{h} \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2r = h \Rightarrow r = \frac{1}{2}h \dots\dots (2)$ نعوض (٢) في (١)

$$v = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h$$

$v = \frac{1}{3}\pi\,\frac{1}{4}h^2 .\, h \Rightarrow v = \frac{\pi}{12}h^3$ نشتق

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{12}3h^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow 2 = \frac{\pi}{4}(6)^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow 2 = \frac{\pi}{4}(36)\frac{dh}{dt}$$

$$2 = 9\pi\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{2}{9\pi}\,m/min$$



مثال : قطعة معدنية على شكل قطع ناقص بمساحة ثابتة تساوي $(60\,\pi)$ وحدة مربعة فإذا أزداد طول محوره الاصغر بمعدل (0.2) وحدة طول / دقيقة فجد معدل النقصان في طول محوره الاكبر عندما يكون طول محوره الاصغر (12) وحدة طول .

الحل :

نفرض طول المحور الاكبر $= 2a$ ، نفرض طول المحور الاصغر $= 2b$

$\frac{da}{dt}$ معدل تغيير طول محوره الاكبر ، $\frac{db}{dt}$ معدل تغيير طول محوره الاصغر

المساحة للقطع الناقص $A = ab\pi$ علاقة اساسية

$$60\pi = ab\pi \overset{\text{نشتق}}{\Rightarrow} 0 = a\frac{db}{dt}\pi + b\,\pi\frac{da}{dt} \dots\dots (1)$$

❖ التغيير بالمساحة $\frac{dA}{dt} = 0$ لأنها المساحة ثابتة .

$$2b = 12 \Rightarrow b = 6$$

نعوض في (١) $A = ab\pi \Rightarrow 60\pi = a\,(6\,\pi) \Rightarrow a = \frac{60\pi}{6\,\pi} = 10$

$$0 = (10)(0.2)\,\pi + 6\,\pi\,\frac{da}{dt} \Rightarrow 2\pi + 6\,\pi\,\frac{da}{dt} = 0 \Rightarrow 6\,\pi\,\frac{da}{dt} = -2\pi$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{-2\pi}{6\pi} = \frac{-1}{3}$$

∴ معدل النقصان في طول محوره الأكبر $= \frac{1}{3}$ وحدة طول / دقيقة

مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة

مبرهنة رول $(Rolle's\ Theorem)$

$\acute{f} = 0$, $\acute{f} = 0$, $\acute{f} = 0$, $g = f(a)$, $f(a)$, c_1 , c_2 , c_3 , $f(b)$

اذا كانت الدالة f :

١) مستمرة في الفترة المغلقة $[a\,,b]$

٢) قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(a\,,b)$

٣) $f\,(b) = f\,(a)$

فإنه يوجد على الاقل قيمة واحدة c تنتمي الى $(a\,,b)$ وتحقق $\acute{f}(c) = 0$

ملاحظات : ١) هذه النظرية تعني هندسيا وجود نقطة واحدة على الاقل تنتمي للمنحني وتكون موازية لمحور السينات.

٢) عند عدم توفر أحد الشروط الثلاثة فإن مبرهنة رول لا تنطبق .

مثال : بين هل أن مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال التالية ؟ ثم جد قيمة c الممكنة :

a) $f\,(x) = (2-x)^2 \quad , \quad x \in [0\,,4]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على الفترة $[0\,,4]$ لأنها كثيرة حدود

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0\,,4)$ لأنها كثيرة حدود

٣) نجد $f\,(0)\ ,\ f\,(4)$

$$f\,(0) = (2-0)^2 = 4$$

$$f\,(4) = (2-4)^2 = (-2)^2 = 4$$

∴ $f\,(0) = f\,(4)$ الدالة f تحقق مبرهنة رول ضمن الفترة المعطاة .

$$\acute{f}(x) = 2\,(2-x)(-1) = -2\,(2-x)$$

$$\acute{f}(c) = -2\,(2-c) \qquad , \quad \acute{f}(c) = 0$$

$-2\,(2-c)=0\,]\ \div\ -2$

$2-c=0\ \Rightarrow \therefore c=2\ \ \in(0\,,4)$

b) $f\,(x)=\ 9x\ +\ 3x^2-\ x^3\ \ ,\ x\ \in[-1\,,1]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على الفترة$[-1\,,1]$ لأنها كثيرة حدود

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1\,,1)$ لأنها كثيرة حدود

٣) نجد $f(1)\ \ ,\ f(-1)$

$f\,(-1)=\ 9(-1)+\ 3(-1)^2-\ (-1)^3=\ -9+3+1=\ -5$

$f\,(1)=\ 9(1)+\ 3(1)^2-\ (1)^3=\ 9+3-1=\ 11$

$\because\ f\,(-1)\neq f\,(1)$ فإن الدالة f لا تحقق مبرهنة رول لأن الشرط الثالث لم يتحقق

c) $f\,(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\ \in[-1\,,2] \\ -1 & x\ \in[-4\,,-1] \end{cases}$

الحل : مجال الدالة $=\ [-4\,,2]$

$\lim_{x\to-1^+}(x^2+1)=(-1)^2+1=2=L_1$

$\lim_{x\to-1^-}-1=-1=\ L_2$ $\qquad \therefore\ L_1\ \neq\ L_2$

$\therefore$ الدالة غير مستمرة لأن الغاية غير موجودة عند $x\ =-1$ وهو الحد الفاصل للفترة

$\therefore$ الدالة f لا تحقق مبرهنة رول

d) $f\,(x)\ =\ k\ \ ,x\ \ \in[a\,,b]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على الفترة $[a\,,b]$ لأنها دالة ثابتة .

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(a\,,b)$ لأنها كثيرة الحدود .

٣) $f(a)=k\ \ ,\ \ f\,(b)\ =\ k\ \ ,\ \ f\,(a)\ =\ f\,(b)\ =\ k$

$\therefore$ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول وإن قيمة c يمكن أن تكون اي قيمة ضمن الفترة $(a\,,b)$ لأن $f'(c)=0$ دائما

مثال : بين هل أن هذه الدوال الاتية تحقق مبرهنة رول ؟

1) $f\,(x)=\ \sqrt{x^2-9}\qquad ,\quad x\ \in[0\,,5]$

الحل : ١) الدالة غير مستمرة على $[0\,,5]$ لأن الدالة غير معرفة .

٢) الدالة غير قابلة للاشتقاق على $(0\,,5)$ لأنها غير معرفة عند $x=3$.

$\therefore$ الدالة لا تحقق مبرهنة رول

2) $f\,(x)=\ \frac{3x}{2x-4}\qquad ,\quad x\ \in[-1\,,3]$

الحل : ١) الدالة غير مستمرة عند $x\ =\ 2$ لأنها غير معرفة .

٢) الدالة غير قابلة للاشتقاق لأنها غير معرفة عند $x\ =\ 2$.

$\therefore$ الدالة لا تحقق مبرهنة رول

3) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad , \quad x \in [-1\,,1]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على $[-1\,,1]$ لأنها مستمرة على المجموعة الحقيقية R .

٢) الدالة غير قابلة للاشتقاق على $(-1\,,1)$ لأنها غير معرفة عند $x = 0$ وسنلاحظ ذلك كالاتي :

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

∴ الدالة لا تحقق مبرهنة رول

ملاحظة :

- الدالة المطلقة دائما مستمرة على اي فترة ، ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندما تكون x تجعل الدالة $= 0$
- الدالة المثلثية $sin\,ax\,, cos\,ax$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق دائما لأن مجالها R .

مثال : هل أن الدالة $f(x) = cos2x \;,\; x \in \left[\frac{-\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right]$ تحقق شروط مبرهنة رول ثم جد c إن أمكن ؟

الحل : ١) الدالة مستمرة على $\left[\frac{-\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right]$

٢) الدالة قابلة للاشتقاق ومعرفة على $\left[\frac{-\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right]$

٣) نجد $f(a), f(b)$ $\qquad f(a) = f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = cos\,2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = cos\,\frac{\pi}{2} = 0$

$$f(b) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\,2\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\,\frac{\pi}{2} = 0$$

$$f(a) = f(b)$$

$$\acute{f}(x) = -2sin2x$$

$$\acute{f}(c) = -2sin2c \quad , \quad \acute{f}(c) = 0$$

$$-2sin2c = 0 \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0 \quad , \quad 0 \in \left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$

$$2c = \pi \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \notin \left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$

مثال : جد قيمة c للدالة $x \in [0\,,\frac{\pi}{2}]$, $f(x) = sinx + cosx$ التي تحقق شروط مبرهنة رول .

الحل : ∵ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول فنقوم بالاشتقاق

$$f(x) = sinx + cosx$$

$$\acute{f}(x) = cosx - sin\,x$$

$$\acute{f}(c) = cos\,c - sin\,c \quad , \quad \acute{f}(c) = 0$$

$$cos\,c - sin\,c = 0 \Rightarrow [cos\,c = sin\,c\,] \div cos\,c \Rightarrow 1 = tan\,c$$

$$either \quad c = \frac{\pi}{4} \in \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right) \qquad or \qquad c = \frac{5\pi}{4} \notin \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$$

مثال : اذا كانت الدالة $f(x) = x^2 + 2x + 1 \quad , \quad x \in [a, 3]$ تحقق شروط مبرهنة رول جد قيمة a

الحل : ∵ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول

$\therefore f(a) = f(3)$

$a^2 + 2a + 1 = (3)^2 + 2(3) + 1 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 16$

$a^2 + 2a - 15 = 0$

$(a+5)(a-3) = 0$

$either \quad a = -5$

$or \quad a = 3$ غير ممكن يهمل

مثال : اذا كانت الدالة $f(x) = ax^2 - x^3 \quad , \quad x \in [-2, 3]$ تحقق شروط مبرهنة رول جد قيمة a .

الحل : ∵ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول

$\therefore f(-2) = f(3)$

$a(-2)^2 - (-2)^3 = a(3)^2 - (3)^3$

$4a + 8 = 9a - 27 \Rightarrow -9a + 4a = -8 - 27 \Rightarrow -5a = -35 \Rightarrow a = \frac{-35}{-5} = 7$

مثال : بين هل ان مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال التالية ؟ ثم جد قيمة c عند تحقق المبرهنة :

1) $f(x) = 8x^2 - x^4 \quad , \quad x \in [-2, 2]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2, 2]$ لأنها كثيرة حدود

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-2, 2)$ لأنها كثيرة حدود

٣) نجد $f(2) \quad , \quad f(-2)$

$f(-2) = 8(-2)^2 - (-2)^4 = 32 - 16 = 16$

$f(2) = 8(2)^2 - (2)^4 = 32 - 16 = 16$

$$f(-2) = f(2)$$

$f'(x) = 16x - 4x^3$

$f'(c) = 16c - 4c^3 \quad , \quad f'(c) = 0$

$[16c - 4c^3 = 0] \div 4$

$4c - c^3 = 0 \Rightarrow c(4 - c^2) = 0$

$either \quad c = 0 \in (-2, 2)$

$or \quad c^2 = 4 \Rightarrow c = \pm 2 \notin (-2, 2)$

مثال : بين هل ان مبرهنة رول تتحقق على الدوال الاتية ثم جد قيمة c عند تحقق المبرهنة ؟

$1)\ f(x) = sin\ x \quad , \quad [0\ ,2\pi]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0\ ,2\pi]$ لأنها دالة دائرية .

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0\ ,2\pi)$.

٣) نجد $f(2\pi) \quad , \quad f(0)$

$f(0) = sin\ (0) = 0$

$f(2\pi) = sin\ (2\pi) = 0$

$f(0) = f(2\pi)$

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول لذا نفرض $(x = c)$ ونفرض $\acute{f}(c) = 0$

$f(x) = sin\ x \implies \acute{f}(x) = cos\ x$

$\acute{f}(c) = cos\ c \implies cos\ c = 0$

$either \quad c = \frac{\pi}{2} \implies c = \frac{\pi}{2} \in (0\ ,2\pi) \quad , \quad or \quad c = \frac{3\pi}{2} \in (0\ ,2\pi)$

$2)\ f\ (x) = 9 \quad , \quad [5\ ,9]$

الحل : ١) الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[5\ ,9]$ لأنها دالة ثابتة .

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(5\ ,9)$.

٣) نجد $f(9) \quad , \quad f\ (5)$

$f(5) = 9$

$f(9) = 9$

$f(5) = f(9)$

∴ الدالة تحقق مبرهنة رول وان قيمة (c) يمكن ان تكون ضمن الفترة $(5\ ,9)$

$3)\ f\ (x) = \sqrt{16 - x^2} \quad , \ x \in [-2\ ,2]$

الحل :

أوسع مجال للدالة $[-4\ ,4]$ $\quad \because\ 16 - x^2 = 0 \implies x^2 = 16 \implies x = \pm 4$

١) الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-4\ ,4]$ لأنها مستمرة على الفترات الجزئية .

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-4\ ,4)$

٣) نجد $f\ (-2) \ , \ f\ (2)$

$f\ (2) = \sqrt{16 - (2)^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$

$f\ (-2) = \sqrt{16 - (-2)^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} \qquad \therefore\ f\ (-2) = f\ (2)$

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول لذا نفرض $(x = c)$ ونفرض $\acute{f}(c) = 0$

$$\acute{f}(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}\Rightarrow \acute{f}(c)=\frac{-c}{\sqrt{16-c^2}}\quad , \quad \acute{f}(c)=0$$

$$\frac{-c}{\sqrt{16-c^2}}=0\ \Rightarrow\ -c=0\ \Rightarrow c=0\ \in(-4\,,4)$$

ملاحظة : نقوم بتطبيق شروط الاستمرارية الثلاثة على الدوال النسبية .

4) $f\,(x)=\frac{x^2-1}{x-2}\quad ,\ x\in[-1\,,1]$

١) مجال الدالة هو $R/2$ حيث إن $x-2\neq 0\ \Rightarrow x\neq 2$

الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1\,,1]$ لأن الفترة تقع ضمن مجالها .

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1\,,1)$ لأن الفترة ضمن مجالها .

٣) نجد $f\,(1)\ ,\ f\,(-1)$

$$f\,(1)=\frac{(1)^2-1}{1-2}=\frac{0}{-1}=0$$

$$f\,(-1)=\frac{(-1)^2-1}{-1-2}=\frac{0}{-3}=0$$

$$f\,(1)=f\,(-1)$$

$\therefore$ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول لذا نفرض $(x=c)$ ونفرض $\acute{f}(c)=0$

$$\acute{f}(x)=\frac{(x-2).\ (2x)-(x^2-1).(1)}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2+1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

$$\acute{f}(c)=\frac{c^2-4c+1}{(c-2)^2}\quad ,\quad \acute{f}(c)=0$$

نستخدم طريقة اكمال المربع لحل المعادلة $(\frac{-4}{2})^2=(-2)^2=4$ $\quad \frac{c^2-4c+1}{(c-2)^2}=0\Rightarrow\ c^2-4c+1=0$

$$c^2-4c=-1\Rightarrow c^2-4c+4=-1+4\Rightarrow(c-2)^2=3\overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow}c-2=\pm\sqrt{3}$$

$$c=\pm\sqrt{3}+2\quad ,\quad either\quad c=\sqrt{3}+2\ \notin(-1\,,1)\qquad or\quad c=-\sqrt{3}+2\ \in(-1\,,1)$$

5) $f\,(x)=\ 2\sin x-\cos 2x\quad ,\ x\in[0\,,\pi]$

١) الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[0\,,\pi]$ لأنها دوال مثلثية .

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0\,,\pi)$ لأن الفترة ضمن مجالها .

٣) نجد $f\,(0)\ ,\ f\,(\pi)$

$$f\,(\pi)=\ 2\sin\pi-\cos 2\pi=2(0)-(1)=-1$$

$$f\,(0)=\ 2\sin(0)-\cos 2(0)=2(0)-(1)=-1$$

$$f\,(\pi)=f\,(0)$$

$\therefore$ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول وتوجد قيمة واحدة على الاقل $c\in(a\,,b)$ وتحقق $\acute{f}(c)=0$

$$\acute{f}(x)=2\cos x-\big(-\sin 2x\,.(2)\big)=2\cos x+2\sin 2x$$

$\acute{f}(c) = 2\cos c + 2\sin 2c \quad , \quad \acute{f}(c) = 0$

$2\cos c + 2\sin 2c = 0 \Rightarrow 2\cos c + 2(2\sin c\cos c) = 0$

$2\cos c + 4\sin c\, 2\cos c = 0 \Rightarrow 2\cos c(1 + 2\sin c) = 0$

$either\ \ 2\cos c = 0 \Rightarrow \cos c = 0 \ \therefore c = \frac{\pi}{2} \in (0\,,\pi)$

$or\ \ 1 + 2\sin c = 0 \Rightarrow 2\sin c = -1 \Rightarrow \sin c = \frac{-1}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6}$ زاوية الاسناد

$c = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \notin (0\,,\pi)$

$6)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & \forall\, x < 1 \\ 7 - 4x & \forall\, x \geq 1 \end{cases}$

الحل :

$7 - 4x \qquad \forall\, x \geq 1$ مستمرة لأنها كثيرة حدود

$x^2 - 4x + 6 \quad \forall\, x < 1$ مستمرة لأنها كثيرة حدود

نطبق شروط الاستمرارية الثلاثة على هذا النوع من الدوال

$1)\ f(1) = 7 - 4(1) = 3$

$2)\ \lim_{x\to1^+}(7 - 4x) = 7 - 4(1) = 3 = L_1$

$\lim_{x\to1^-}(x^2 - 4x + 6) = (1)^2 - 4(1) + 6 = 3 = L_2$

$\therefore L_1 = L_2 = 3$ الغاية موجودة

$3)\ f(1) = \lim_{x\to1} f(x) = 3$ الدالة مستمرة على الفترة المعطاة

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \forall\, x < 1 \\ -4 & \forall\, x \geq 1 \end{cases}$

$f'(1)^+ = -4$

$f'(1)^- = 2(1) - 4 = -2$

المشتقة من اليمين لا تساوي المشتقة من اليسار لذلك فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق ولا تحقق مبرهنة رول

مثال : ابحث تحقق مبرهنة رول على الدالة $f(x) = |x| \ , \ x \in [-3\,,3]$

الحل :

$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \forall\, x < 0 \\ x & \forall\, x \geq 0 \end{cases}$

$1)\ f(0) = 0$

$2)\ \lim_{x\to0^+}(x) = 0 = L_1$

$\lim_{x\to0^-}(-x) = 0 = L_2$

الغاية موجودة $\therefore\ L_1 = L_2 = 0$

$3)\ f(1) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$ الدالة مستمرة على الفترة المعطاة

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \forall x < 0 \\ 1 & \forall x \geq 1 \end{cases}$$

$f'(0)^{+} = 1$

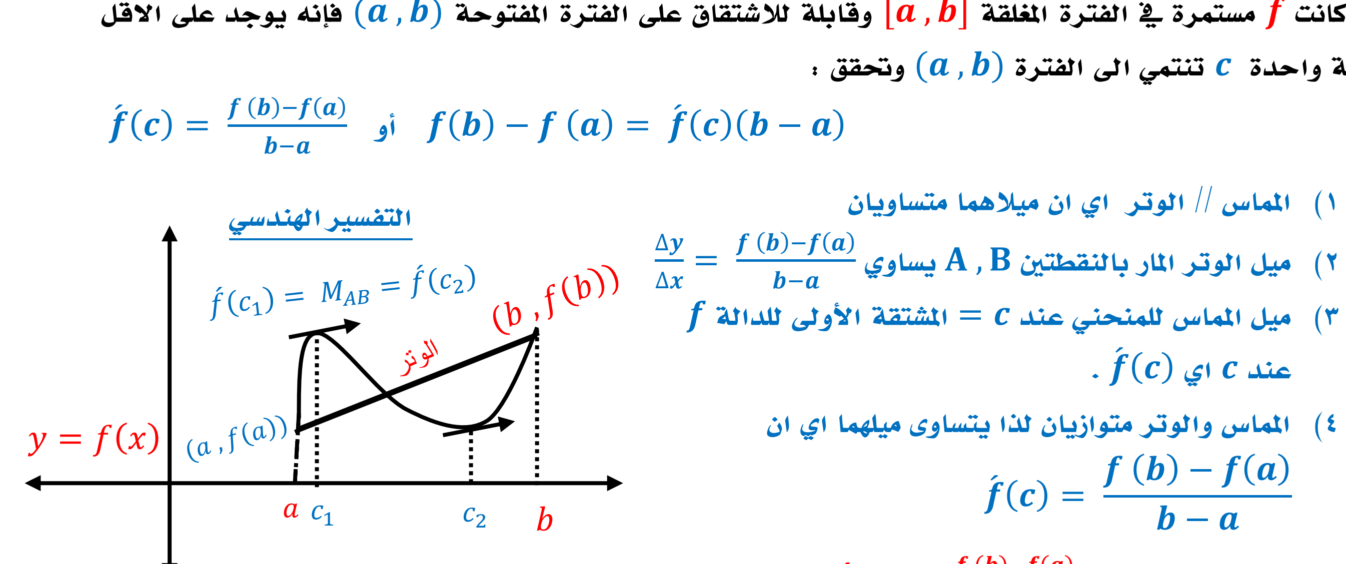
$f'(0)^{-} = -1$

المشتقة من اليمين لا تساوي المشتقة من اليسار لذلك فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق ولا تحقق مبرهنة رول

مبرهنة القيمة المتوسطة

اذا كانت f مستمرة في الفترة المغلقة $[a , b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a , b) فإنه يوجد على الاقل قيمة واحدة c تنتمي الى الفترة (a , b) وتحقق :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{أو} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

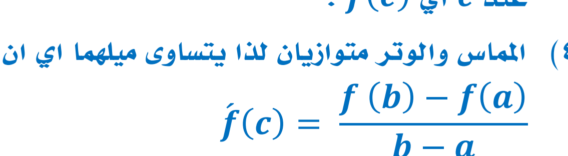


١) المماس // الوتر اي ان ميلاهما متساويان

٢) ميل الوتر المار بالنقطتين A , B يساوي $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

٣) ميل المماس للمنحني عند c = المشتقة الأولى للدالة f عند c اي $f'(c)$.

٤) المماس والوتر متوازيان لذا يتساوى ميلهما اي ان



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

لإيجاد قيمة c التي تحقق $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ يجب توفر الشرطين التاليين :

١- ان تكون f دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a , b]$

٢- ان تكون f دالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a , b)

ملاحظة :

إن مبرهنة رول هي حالة خاصة من مبرهنة القيمة المتوسطة ففي مبرهنة رول يجب توافر شرط ثالث هو $f(a) = f(b)$ اي ان الوتر والمماس يوازيان محور السينات اي ان فرق الصادات $= 0$ لذا يصبح الميل $= 0$ فنحصل على $f'(c) = 0$

مثال : جد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لكل من الدوال الاتية :

a) $f(x) = x^2 - 6x + 4 \quad , \ x \in [-1 , 7]$ وزاري ٢٠١٢ / د٣

الحل : ١) الدالة مستمرة في الفترة $[-1 , 7]$ لأنها كثيرة الحدود .

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1 , 7)$ لأنها كثيرة حدود

$\acute{f}(x) = 2x - 6$

$\acute{f}(c) = 2c - 6$ ميل المماس

$\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(7)-f(-1)}{7-(-1)} = \frac{11-11}{8} = 0$ ميل الوتر

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$2c - 6 = 0 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \in (-1, 7)$

b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $x \in [-4, 0]$

الحل : ∵ أوسع مجال للدالة

$25 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 25 = x^2 \Rightarrow x = \pm 5 \Rightarrow x \in [-5, 5]$

١) نبحث الاستمرارية في الفترة $[-4, 0]$

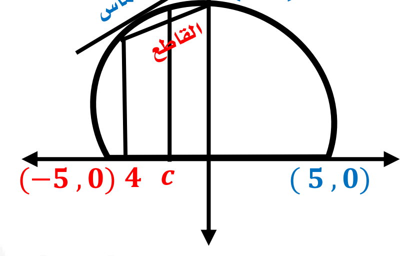
$\forall a \in [-4, 0] \Rightarrow f(a) = \sqrt{25 - a^2} \in R$

$\lim_{x \to -4^+} f(x) = \lim_{x \to -4^+} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 0} = \sqrt{25} = 5$

∴ الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-4, 0]$

٢) الدالة قابلة للاشتقاق عند الفترة المفتوحة $(-4, 0)$



$\acute{f}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow \acute{f}(c) = \frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$ ميل المماس

$\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(0)-f(-4)}{0+4} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ ميل الوتر

$\frac{1}{2} = \frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$

$-2c = \sqrt{25 - c^2}$ بالتربيع

ميل المماس = ميل الوتر

$4c^2 = 25 - c^2 \Rightarrow 4c^2 + c^2 = 25 \Rightarrow 5c^2 = 25 \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow c = = \pm\sqrt{5}$

$either \quad c = \sqrt{5} \notin (-4, 0)$

$or \quad c = -\sqrt{5} \in (-4, 0)$

c) $f(x) = 2x + \sin x$, $x \in [0, \pi]$

الحل :

١) الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[0, \pi]$ لأنها دالة دائرية

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0, \pi)$

∵ الشروط متحققة فإن مبرهنة القيمة المتوسطة متحققة

$f(x) = 2x + \sin x \Rightarrow \acute{f}(x) = 2 + \cos x \Rightarrow \acute{f}(c) = 2 + \cos(c)$ ميل المماس

∵ ميل المماس = ميل الوتر ، ميل الوتر $\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(2\pi+\sin\pi)-0}{\pi-0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$$2 + \cos(c) = 2 \Rightarrow \cos(c) = 2-2 \Rightarrow \cos(c) = 0 \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \in (0,\pi)$$

مثال : اذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2$ ، $f : [0,b] \to R$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = \frac{2}{3}$ فجد قيمة b . وزاري ٢٠١٨ / د١

الحل :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 \Rightarrow \acute{f}(x) = 3x^2 - 8x$$

$$\acute{f}(c) = 3c^2 - 8c$$

ميل المماس $\acute{f}\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{4}{9}\right) - 8\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = \frac{-12}{3} = -4$

ميل الوتر $\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(0)}{b-0} = \frac{b^3-4b^2-0}{b} = \frac{b(b^2-4b)}{b} = b^2 - 4b$

ميل المماس = ميل الوتر

$$b^2 - 4b = -4 \Rightarrow b^2 - 4b + 4 = 0 \Rightarrow (b-2)(b-2) = 0$$

$$(b-2)^2 = 0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} b = 2$$

التقريب بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة (نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة)

اذا كانت f دالة مستمرة ومعرفة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في (a,b) ولو اعتبرنا $(h = b - a)$ فان $b = a + h$ حيث $h \neq 0, h \in R$ فإنه بموجب مبرهنة القيمة المتوسطة نحصل على

$$\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{h} \Rightarrow \acute{f}(c) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow \boxed{f(a+h) \cong f(a) + h\acute{f}(c)}$$

وعندما يكون اقتراب b من a قربا كافيا تكون في هذه الحالة h صغيرة ويصبح الوتر صغيراً ونهايته قريبتان من a ، اي ان المماس عند c سيكون مماسا للمنحني عند نقطة قريبة جدا من النقطة $(x = a)$ ولذلك يصبح :

$\boxed{f(a+h) \cong f(a) + h\acute{f}(a)}$ ويقال لـ $h\acute{f}(a)$ التغيير التقريبي للدالة .

ملاحظة : لإيجاد القيمة التقريبية بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة نتبع ما يلي :

١) نفرض دالة على شكل السؤال ونختار قيمة لـ a قريبة من القيمة المعطاة في السؤال بحيث تخرج $f(a)$ مضبوطة ونجد $f(a)$

٢) نجد قيمة h حيث $h = b - a$

٣) نجد $\acute{f}(a)$

٤) نطبق القانون $f(a+h) \cong f(a) + h\acute{f}(a)$ حيث $h\acute{f}(a)$ هو التغيير التقريبي للدالة .

النوع الأول : عندما تكون الدالة موجودة في السؤال

مثال : اذا كان $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ فجد بصورة تقريبية $f(1.001)$.

الحل :

$a = 1$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

$b = 1.001$

$h = b - a \Rightarrow 1.001 - 1 = 0.001$

$f(a) = a^3 + 3a^2 + 4a + 5$

$f(1) = 1 + 3 + 4 + 5 = 13$

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4 \Rightarrow f'(1) = 3 + 6 + 4 = 13$

$f(a + h) \cong f(a) + h f'(a)$

$f(1 + 0.001) \cong f(1) + (0.001)f'(1) \Rightarrow f(1.001) \cong 13 + (0.001)(13)$

$f(1.001) \cong 13 + (0.013) \cong 13.013$

النوع الثاني : عندما تكون الدالة غير موجودة في السؤال

مثال : جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة تقريبا مناسبا للعدد $\sqrt{26}$

الحل :

$a = 25$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

$b = 26$

$h = b - a = 26 - 25 = 1$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(a) = \sqrt{a} \Rightarrow f(25) = \sqrt{25} = 5$

$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{2(5)} = \frac{1}{10} = 0.1$

$f(a + h) \cong f(a) + h f'(a)$

$f(25 + 1) \cong f(25) + (1)f'(25) \Rightarrow f(26) \cong 5 + (1)(0.1) = 5.1$

مثال : اذا كانت $f(x) = \sqrt[3]{3x + 5}$ جد قيمة تقريبية للدالة $f(1.002)$

الحل :

$a = 1$ نفرض

$b = 1.002$

$h = b - a = 1.002 - 1 = 0.002$

$f(x) = \sqrt[3]{3x+5}$

$f'(x) = \frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+5)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+5)^2}}$

$f(a) = \sqrt[3]{3(1)+5} = \sqrt[3]{8} = 2$

$f'(a) = \frac{1}{\sqrt[3]{(3a+5)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3(1)+5)^2}} = \frac{1}{(2)^2} = \frac{1}{4} = 0.25$

$hf'(a) = (0.002)(0.25) = 0.00050 = 0.0005$

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a) \Longrightarrow f(1+0.002+h) \cong 2 + 0.0005 \cong 2.0005$

مثال : جد التغير التقريبي للمقدار $\sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3$

الحل :

$a = 1$ نفرض

$b = 0.98$

$h = b - a = 0.98 - 1 = -0.02$

$y = \sqrt[5]{x^3} + x^4 + 3 = x^{\frac{3}{5}} + x^4 + 3$

$y' = \frac{3}{5} x^{\frac{-2}{5}} + 4x^3$

$f'(a) = f'(1) = \frac{3}{5}(1)^{\frac{-2}{5}} + 4(1)^3 = \frac{3}{5} + 4 = 4.6$

$h f'(a) = -0.02(4.6) = -0.092$

مثال : اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي نصف قطر قاعدتها حجمها 124π جد نصف قطر قاعدتها بصورة تقريبية .

الحل : الارتفاع يساوي نصف القطر $\boxed{h = r}$

$v = \pi r^2 h \Rightarrow r = \pi r^2 . r \Rightarrow v = \pi r^3 \Rightarrow 124\pi = \pi r^3$

$r^3 = 124 \Rightarrow v = \sqrt[3]{124}$

$a = 125$ نفرض

$b = 124$

$h = b - a = 124 - 125 = -1$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \Longrightarrow f(x)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f(a) = f(125) = \sqrt[3]{125} = 5$

$f'^{(a)} = f'^{(125)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(125)^2}} = \frac{1}{3(5)^2} = \frac{1}{75} = 0.013$

$h\,f'(a) = (-1).(0.013) = -0.013$

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a) \cong 5 - 0.013 \cong 4.987$

ملاحظة : اذا كان المطلوب ايجاد حجم المادة او كمية المادة نكتفي بإيجاد $h\,f'(a)$ اي التغير التقريبي .

ثالثا : عندما يكون في السؤال عبارة من قانون مساحة او حجم او ما شابه ذلك

مثال : كرة مجوفة قطرها $3cm$ وسمك الغلاف $0.2cm$ جد حجم المادة المصنوعة منها .

الحل :

$a = 3$

$h = 0.2$

$v = \frac{4}{3}r^3\pi$

$f(x) = \frac{4\pi}{3}x^3 \Rightarrow f(x)' = 4\pi x^2$

$f'(a)=f'(3) = 4\pi(3)^2 = 36\pi$

$hf'(a) = (0.2)(36\pi) = 7.2\pi$ حجم المادة المصنوعة

مثال : مكعب طول حرفه 9.98 cm جد حجمه بصورة تقريبية بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل : ليكن v حجم المكعب الذي طول حرفه x .

$v(x) = x^3$

$\begin{cases} b = 9.98 \\ a = 10 \end{cases} \Rightarrow h = b - a = 9.98 - 10 = -0.02$

$v(10) = 10^3 = 1000$

$v(a) = a^3$

$v'(a) = 3a^2 \Rightarrow v'(10) = 3(10)^2 = 300$

$v(a+h) \cong v(a) + h\,v'(a)$

$v(10+(-0.02)) \cong v(10) + (-0.02)v'(a)$

$v(9.98) \cong 1000 + (-0.02)(300) \cong 994\ cm^3$

مثال : لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فإذا تغيرت x من 8 الى 8.06 فما مقدار التغيير التقريبي للدالة .

الحل : $a = 8 \quad , \quad b = 8.06$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

$\acute{f}(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$h = b - a = 8.06 - 8 = 0.06$

$\acute{f}(a) = \acute{f}(8) = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{2}{3\,(2)} = \frac{1}{3}$

$h\acute{f}(a) \cong (0.06)\left(\frac{1}{3}\right) \cong 0.02$ مقدار التغيير التقريبي

مثال : يراد طلاء مكعب طول حرفه 10 cm فاذا كان سمك الطلاء 0.15 cm أوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل : ليكن v حجم المكعب الذي طول حرفه x ، سمك الطلاء $= 0.15 + 0.15 = 0.3$

طول حرف المكعب مع الطلاء $b = 10.3$

نفرض $a = 10$ اقرب رقم للعدد المعطى

$h = b - a = 10.3 - 10 = 0.3$

$v(x) = x^3 \Longrightarrow \acute{v}(x) = 3x^2$

$\acute{v}(a) = 3a^2 \Rightarrow v'(10) = 3\,(10)^2 = 300$

$h\,\acute{v}(a) \cong h\,\acute{v}(10) = (0.3)(300) \cong 90\ cm^3$ حجم الطلاء بصورة تقريبية

مثال : بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد وبصورة تقريبية ومقربا لثلاث مراتب عشرية على الاقل كلاً مما يأتي :

a) $\sqrt[3]{7.8}$ وزاري ٢٠١١ / د١

$a = 8$ نفرض

$b = 7.8$

$h = b - a = 7.8 - 8 = -0.2$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f(a) = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$

$\acute{f}(a) = \acute{f}(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(8)^2}} = \frac{1}{3\,(2)^2} = \frac{1}{12} = 0.083$

$f(a+h) \cong f(a) + h\,\acute{f}(a) \Longrightarrow f\big(8 + (-0.2)\big) \cong f(8) + (-0.2)\,\acute{f}(8)$

$f(7.8) \cong 2 - (0.2)(0.083) \cong 2 - 0.0166 \cong 1.9834$

---

b) $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

$a = 16$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى

$b = 17$

$h = 17 - 16 = 1$

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x} \Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

$$f(16)=\sqrt{16}+\sqrt[4]{16}=4+2=6$$

$$\acute{f}(16)=\frac{1}{2\sqrt{16}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{(16)^3}}=\frac{1}{2(4)}+\frac{1}{4(2)^3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{4+1}{32}=\frac{5}{32}=0.156$$

$$f(a+h)\cong f(a)+h\,\acute{f}(a)$$

$$f(17)\cong f(16)+(1)\acute{f}(16)\cong 6+(1)(0.156)\cong 6.156$$

---

c) $\sqrt[3]{0.12}$

$a=0.125$ نفرض

$b=0.120$

$$h=b-a=0.120-0.125=-0.005$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f(a)=f(0.125)=\sqrt[3]{0.125}=0.5$$

$$\acute{f}(a)=\acute{f}(0.125)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(0.125)^2}}=\frac{1}{3(0.5)^2}=\frac{1}{3(0.25)}=\frac{1}{0.75}=1.333$$

$$f(a+h)\cong f(a)+h\,\acute{f}(a)$$

$$f(0.12)\cong f(0.125)+(-0.005)(1.333)$$

$$f(0.12)\cong 0.5-0.006665\cong 0.493335$$

مثال : مخروط دائري قائم ارتفاعه ثلاثة امثال نصف قطره فإذا كان نصف قطره 1.90 جد حجمه بصورة تقريبية بإستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل :

$a=2$ نفرض

$b=1.9$

$$h=b-a=1.9-2=-0.1$$

$$h=3(r)\Rightarrow h=3r$$

$$v=\frac{\pi}{3}r^2h \Rightarrow v=\frac{\pi}{3}r^2.3r \Rightarrow v=\pi r^3$$

$$v=\pi x^3 \quad , \quad v'=3x^2\pi$$

$$f(a)=f(2)=\pi(2)^3=8\pi$$

$f'(a) = f'(2) = 3\pi(2)^2 = 12\pi$

$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a)$
$f\big(2+(-0.1)\big) = 8\pi + (-0.1)12\pi = 8\pi - 1.2\pi = 6.8\pi$

حل تمارين (3 – 3)

س1: أوجد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول في كل مما يأتي :

a) $f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad x \in [-3\,,3]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على $[-3\,,3]$ لأنها كثيرة حدود
٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-3\,,3)$ لأنها كثيرة حدود
٣) نجد $f(3) \;,\; f(-3)$

$f(-3) = (-3)^3 - 9(-3) = -27 + 27 = 0$

$f(3) = (3)^3 - 9(3) = 27 - 27 = 0$

$\therefore$ الدالة تحقق مبرهنة رول نفرض $\acute{f}(c) = 0$ ، $f(-3) = f(3)$

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 9$

$\acute{f}(c) = 3c^2 - 9$

$3c^2 - 9 = 0 \Rightarrow 3c^2 = 9 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \mp\sqrt{3} \in (-3\,,3)$

---

b) $f(x) = 2x + \frac{2}{x} \quad , \; x \in \left[\frac{1}{2}\,,2\right]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على الفترة $\left[\frac{1}{2}\,,2\right]$ لأن $0 \notin \left[\frac{1}{2}\,,2\right]$
٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $\left(\frac{1}{2}\,,2\right)$ لأن $0 \notin \left(\frac{1}{2}\,,2\right)$
٣) نجد $f(2) \;,\; f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 + 4 = 5$$

$$f(2) = 2(2) + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$$

$\therefore$الدالة تحقق مبرهنة رول نفرض $\acute{f}(c) = 0$ ، $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2)$

$$f(x) = 2x + \frac{2}{x} \Rightarrow f(x) = 2x + 2x^{-1}$$

$\acute{f}(x) = 2 - 2x^{-2} = 2 - \frac{2}{x^2}$

$\acute{f}(c) = 2 - \frac{2}{c^2} \Rightarrow 2 - \frac{2}{c^2} = 0 \Rightarrow \frac{2c^2 - 2}{c^2} = 0 \Rightarrow 2c^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2c^2 = 2$

$\therefore c^2 = 1 \Rightarrow \therefore c = 1 \in (\frac{1}{2}, 2)$ ، $c = -1 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ نهمل السالب

c) $f(x) = (x^2 - 3)^2, \quad x \in [-1, 1]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على $[-1, 1]$

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1, 1)$

٣) نجد $f(1)$, $f(-1)$

$f(-1) = (1 - 3)^2 = 4$

$f(1) = (1 - 3)^2 = 4$

$f(-1) = f(1)$ ، ∴الدالة تحقق مبرهنة رول نفرض $\acute{f}(c) = 0$

$\acute{f}(x) = 2(x^2 - 3).2x = 4x(x^2 - 3)$

$f(c) = 4c(c^2 - 3) \Rightarrow 4c(c^2 - 3) = 0$

$either \; 4c = 0 \Rightarrow c = 0 \in (-1, 1)$

$or \; c^2 - 3 = 0 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \mp\sqrt{3} \notin (-1, 1)$

س2: جد تقريبا لكل مما يلي بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة :

a) $\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$

الحل :

$a = 64$ نفرض

$b = 63$

$h = b - a = 63 - 64 = -1$

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

$f(64) = \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} \Rightarrow f(64) = 8 + 4 = 12$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$\acute{f}(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}$

$\acute{f}(64) = \frac{1}{2(8)} + \frac{1}{3(16)} = \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{3+1}{48} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$

$\acute{f}(64) = 0.083$

$f(a + h) \cong f(a) + h\,\acute{f}(a)$

$f\,(64+(-1)) \cong f\,(64)+(-1)\acute{f}(64) \;\cong 12-0.083 = 11.917$

b) $(1.04)^3 + 3\,(1.04)^4$

الحل :

$a = 1$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى

$b = 1.04$

$h = 1.04 - 1 = 0.04$

$f\,(x) = x^3 + 3\,x^4$

$f\,(1) = 1 + 3 = 4$

$\acute{f}(x) = 3x^2 + 12x^3$

$\acute{f}(1) = 3 + 12 = 15$

$f\,(a+h) \cong f\,(a) + h\,\acute{f}(a)$

$f\,(1.04) \cong f\,(1) + (0.04)(15) \;\cong 4 + 0.6 = 4.6$

---

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

الحل :

$a = 8$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى

$b = 9$

$h = 9 - 8 = 1$

$$f\,(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{-1}{3}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{-1}{3}x^{\frac{-4}{3}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\acute{f}(a) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{a^4}}$$

$$f\,(8) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$$

$$\acute{f}(8) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{8^4}} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{(2)^4} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{-1}{48}$$

$f\,(a+h) \cong f\,(a) + \;h\,\acute{f}(a)$

$f\,(8+1) \cong f\,(8) + \;(1)\acute{f}(8)$

$$f\,(9) \cong \frac{1}{2} + \frac{-1}{48} \cong \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \cong \frac{24-1}{48} = \frac{23}{48} = 0.479$$

d) $\frac{1}{101}$

الحل :

$a = 100$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى

$b = 101$

$h = 101 - 100 = 1$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$\acute{f}(x) = -x^{-2}$

$f(100) = \frac{1}{100} = 0.01$

$\acute{f}(100) = -(100)^{-2} = \frac{-1}{(100)^2} = \frac{-1}{10000} = -0.0001$

$f(a+h) \cong f(a) + h\acute{f}(a)$

$f(100+1) \cong f(100) + (1)\acute{f}(100)$

$f(101) \cong 0.01 + (-0.0001) \cong 0.01 - 0.0001 \cong 0.0099$

---

e) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.5} = \sqrt{0.50}$

$a = 0.49$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى

$b = 0.50$

$h = 0.50 - 0.49 = 0.01$

$f(x) = \sqrt{x}$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(0.49) = \sqrt{0.49} = 0.7$

$\acute{f}(0.49) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}} = \frac{1}{2(0.7)} = \frac{1}{1.4} = \frac{10}{14} = 0.714$

$f(a+h) \cong f(a) + h\acute{f}(a)$

$f(0.49 + 0.01) \cong 0.7 + (0.01)(0.714)$

$f(0.50) \cong 0.7 + 0.00714 \cong 0.70714$

س3 : كرة نصف قطرها $(6\ cm)$ طليت بطلاء سمكه $(0.1\ cm)$ جد كمية الطلاء بصورة تقريبية بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة . وزاري ٢٠١٤ / د١

الحل : حجم كمية الطلاء = حجم الكرة مع الطلاء – حجم الكرة

$b = 6.1$ وهو يمثل نصف القطر للكرة مضافا له كمية الطلاء

نفرض اقرب رقم للعدد المعطى $a = 6$

$$h = 6.1 - 6 = 0.1$$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\acute{v}(x) = \frac{4}{3}\pi\, 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\acute{v}(a) = 4\pi a^2$$

$$\acute{v}(6) = 4\pi (6)^2 = 144\pi$$

$h\,\acute{v}(a) = (0.1)(144\pi) = 14.4\pi$ كمية الطلاء بصورة تقريبية

س4 : كرة حجمها $84\pi\ cm^3$ جد نصف قطرها بصورة تقريبية بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل : نفرض الحجم $= v$

نفرض نصف القطر $= r$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow 84\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \therefore\ r^3 = 63 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt[3]{63}}$$

$a = 64$ نفرض اقرب رقم للعدد المعطى

$$b = 63$$

$$h = 63 - 64 = -1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\acute{f}(64) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}} = \frac{1}{3(4)^2} = \frac{1}{48} = 0.02$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h\,\acute{f}(a)$$

$$f(63) \cong f(64) + (-1)\acute{f}(64) \cong 4 - 0.02 = 3.98\ cm$$

س5 : مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته ، فاذا كان ارتفاعه $2.98\ cm$ فجد حجمه بصورة تقريبية بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل :

نفرض الارتفاع $= h$ ، نفرض نصف القطر $= r$

نفرض اقرب رقم للعدد المعطى $a = 3$ ، $b = 2.98$

$$h = b - a = 2.98 - 3 = -0.02$$

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $\boxed{h = 2r} \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{2}h}$

$v = \frac{\pi}{3} h (\frac{1}{2}h)^2$

$v = \frac{\pi}{12} h^3$

$\acute{v} = \frac{\pi}{12} 3h^2 \Rightarrow \acute{v} = \frac{\pi}{4} h^2$

$v(3) = \frac{1}{12}\pi (3)^3 = \frac{27}{12}\pi = 2.25\pi$

$\acute{v}(a) = \frac{1}{4}\pi a^2 \Rightarrow \acute{v}(3) = \frac{1}{4}\pi (3)^2 = \frac{9}{4}\pi = 2.25\pi$

$v(a+h) \cong v(a) + h\,\acute{v}(a)$

$v(2.98) \cong v(3) + (-0.02)\acute{v}(3) \cong 2.25\pi - (0.02)2.25\pi \cong 2.25\pi - 0.045\pi$

$v(2.98) \cong 2.205\,\pi\, cm^3$

س6 : بين ان كل دالة من الدوال الاتية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة إزاء كل منها ثم جد قيمة c .

a) $f(x) = (x-1)^4$, $[-1, 3]$ وزاري ٢٠١١ / د٢

الحل : ١) الدالة مستمرة على $[-1, 3]$ لأنها كثيرة الحدود

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1, 3)$ لأنها كثيرة الحدود

٣) نجد $f(-1), f(3)$

$f(-1) = (-1-1)^4 = 16$

$f(3) = (3-1)^4 = 16$

$\therefore$ الدالة f تحقق مبرهنة رول $f(-1) = f(3)$

$\acute{f}(x) = 4(x-1)^3 \Rightarrow \acute{f}(c) = 4(c-1)^3$ ، $\acute{f}(c) = 0$

$[4(c-1)^3 = 0] \div 4$

$(c-1)^3 = 0 \Rightarrow c-1 = 0 \Rightarrow c = 1 \in (-1, 3)$

---

b) $h(x) = x^3 - x$, $[-1, 1]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على $[-1, 1]$ لأنها كثيرة الحدود

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1, 1)$ لأنها كثيرة الحدود

٣) نجد $h(1), h(-1)$

$h(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$

$h(1) = (1)^3 - (1) = 1 - 1 = 0$

∴ الدالة h تحقق مبرهنة رول $h(-1) = h(1)$

$h'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow h'(c) = 3c^2 - 1$ ، $h'(c) = 0$

$3c^2 - 1 = 0$

$3c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1, 1)$, $c = -\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1, 1)$

---

c) $g(x) = x^2 - 3x$, $[-1, 4]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على $[-1, 4]$ لأنها كثيرة الحدود

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1, 4)$ لأنها كثيرة الحدود

٣) نجد $g(4)$, $g(-1)$

$g(-1) = (-1)^2 - 3(-1) = 1 + 3 = 4$

$g(4) = (4)^2 - 3(4) \Rightarrow 16 - 12 = 4$

∴ الدالة g تحقق مبرهنة رول $g(-1) = g(4)$

$\acute{g}(x) = 2x - 3 \Rightarrow \acute{g}(c) = 2c - 3$ ، $\acute{g}(c) = 0$

$2c - 3 = 0$

$2c = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \in (-1, 4)$

---

d) $f(x) = \cos 2x + 2\cos x$, $[0, 2\pi]$ وزاري ٢٠١٨ / د١

الحل : ١) الدالة مستمرة على $[0, 2\pi]$

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على $(0, 2\pi)$

٣) نوجد $f(2\pi)$, $f(0)$

$f(0) = \cos(0) + 2\cos(0) = 1 + 2 = 3$

$f(2\pi) = \cos 4\pi + 2\cos 2\pi = 1 + 2 = 3$

∴ الدالة f تحقق مبرهنة رول $f(0) = f(2\pi)$

$\acute{f}(x) = -2\sin 2x - 2\sin x \Rightarrow \acute{f}(c) = -2\sin 2c - 2\sin c$ ، $\acute{f}(c) = 0$

$-2\sin(2c) - 2\sin(c) = 0 \overset{\div -2}{\Longrightarrow} \sin(2c) + \sin(c) = 0$

$2\sin(c)\cos(c) + \sin(c) = 0 \Rightarrow \sin(c)[2\cos(c) + 1] = 0$

$either\ \sin c = 0 \Rightarrow c = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots \Rightarrow c = \pi \in (0, 2\pi)$

$or \quad 2\cos(c) + 1 = 0 \Rightarrow \cos c = \frac{-1}{2}$ زاوية الاسناد $= \frac{\pi}{3}$

الاشارة السالبة موجودة في الربعين الثاني والثالث بالنسبة لدالة الـ cos

$c = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in (0, 2\pi)$ ربع ثاني

$c = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in (0, 2\pi)$ ربع ثالث

س7 : أختبر امكانية تطبيق القيمة المتوسطة للدوال التالية على الفترة المعطاة إزاءها مع ذكر السبب وان تحققت المبرهنة ، جد قيم c الممكنة :

a) $f(x) = x^3 - x - 1, \quad [-1, 2]$

الحل : ١) الدالة f مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 2]$ لأنها كثيرة حدود

٢) الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 2)$ لأنها كثيرة حدود

الشروط متحققة فهي تحقق القيمة المتوسطة

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 1$

$\acute{f}(c) = 3c^2 - 1$ ميل المماس

$f(-1) = -1 + 1 - 1 = -1$

$f(2) = 8 - 2 - 1 = 5$

$\acute{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5 + 1}{3} = \frac{6}{3} = 2$ ميل الوتر

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$3c^2 - 1 = 2 \Rightarrow [3c^2 - 3 = 0] \div 3 \Rightarrow c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c^2 = 1$

$c^2 = \mp 1 \qquad \therefore c = 1 \in (-1, 2)$

$c = -1 \notin (-1, 2)$

---

b) $h(x) = x^2 - 4x + 5 \quad, [-1, 5]$

الحل : ١) الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1, 5]$ لأنها كثيرة حدود

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 5)$ لأنها كثيرة حدود

الشروط متحققة فهي تحقق القيمة المتوسطة

$h(5) = 25 - 20 + 5 = 10$

$h(-1) = 1 + 4 + 5 = 10$

$\acute{h}(x) = 2x - 4 \Rightarrow \acute{h}(c) = 2c - 4$ ميل المماس

$\acute{h}(x) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = \frac{h(5) - h(-1)}{5 - (-1)} = \frac{10 - 10}{6} = 0$ ميل الوتر

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$2c - 4 = 0 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \in [-1, 5]$

---

c) $g(x) = \frac{4}{x+2}$, $[-1, 2]$

الحل : ١) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 2]$ لأن $-2 \notin [-1, 2]$

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 2)$ لأن $-2 \notin (-1, 2)$

الشروط متحققة فهي تحقق القيمة المتوسطة

$$g(x) = 4(x+2)^{-1} \Rightarrow \acute{g}(x) = -4(x+2)^{-2} = \frac{-4}{(x+2)^2}$$

$$g(-1) = \frac{4}{-1+2} = 4$$

$$g(2) = \frac{4}{2+2} = 1$$

$$\acute{g}(c) = \frac{-4}{(c+2)^2}$$

$$\acute{g}(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{g(2) - g(-1)}{2 - (-1)} = \frac{1 - 4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$$\frac{-4}{(c+2)^2} = -1 \Rightarrow [-(c+2)^2 = -4\ ].-1$$

$(c+2)^2 = 4$ بالجذر

$c + 2 = \pm 2$

either $c + 2 = 2 \Rightarrow c = 0 \in (-1, 2)$

or $c + 2 = -2 \Rightarrow c = -4 \notin (-1, 2)$

---

d) $B(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$, $[-2, 7]$

الحل :

١) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2, 7]$

٢) الدالة B (x) غير قابلة للاشتقاق عند $x = -1$ لأن $-1 \in (-2, 7)$

٣) الدالة B (x) لا تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لأن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = -1$

السبب للاطلاع : (توضيح عدم قابلية الاشتقاق)

$$B(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \acute{B}(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\,(x+1)^{\frac{1}{3}}}$$

$$3\,(x+1)^{\frac{1}{3}} = 0\ ] \div 3 \Rightarrow (x+1)^{\frac{1}{3}} = 0 \ \therefore x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \in [-2, 7]$$

أمثلة اضافية محلولة

مثال : جد تقريبا لكل مما يأتي باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة أو نتيجتها :

1) $\sqrt[4]{82}$

$a = 81$ اقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

$b = 82$

$h = b - a = 82 - 81 = 1$

$f(x) = \sqrt[4]{x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

$f(a) = \sqrt[4]{a} \Rightarrow f(81) = \sqrt[4]{81} = 3$

$$\acute{f}(a) = \frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}} \Rightarrow \acute{f}(81) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(81)^3}} = \frac{1}{4(3)^3} = \frac{1}{4\,(27)} = \frac{1}{108} = 0.009$$

$f\,(a+h) \cong f\,(a) + h\acute{f}(a)$

$f\,(81+1) \cong f\,(81) + (1)\acute{f}(81) \Rightarrow f\,(82) \cong 3 + (1)(0.009) = 3.009$

---

2) $\sqrt[3]{0.126}$

$a = 0.125$ اقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

$b = 0.126$

$h = b - a = 0.126 - 0.125 = 0.001$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$f(a) = \sqrt[3]{a} \Rightarrow f(0.125) = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$

$$\acute{f}(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$$

$$\acute{f}(0.125) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0.125)^2}} = \frac{1}{3\ (0.5)^2} = \frac{1}{3\,(0.25)} = \frac{1}{0.75} = 1.3333$$

$f\,(a+h) \cong f\,(a) + h\acute{f}(a)$

$f\,(0.125 + 0.001) \cong 0.5 + (0.001)(1.3333)$

$f\,(0.126) \cong 0.5 + 0.00133 = 0.50133$

3) $\sqrt[5]{-31}$

$a = -32$ اقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

$b = -31$

$h = b - a = -31 - (-32) = 1$

$f(x) = \sqrt[5]{x}$

$\acute{f}(x) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

$f(a) = \sqrt[5]{a} \Rightarrow f(-32) = \sqrt[5]{-32} = -2$

$\acute{f}(a) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{a^4}} \Rightarrow \acute{f}(-32) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{(-32)^4}} = \dfrac{1}{5(-2)^4} = \dfrac{1}{80} = 0.0125$

$f(a+h) \cong f(a) + h\acute{f}(a)$

$f(-31) \cong f(-32) + (1)\acute{f}(-32) \Rightarrow f(-31) \cong -2 + (1)(0.0125) = -1.9875$

مثال : باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية طول ضلع مربع مساحته $(50\ m^2)$

الحل : مساحة المربع = مربع طول الضلع

$A = x^2 \Rightarrow 50 = x^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{50}}$

نفرض $a = 49$ اقرب رقم للعدد المعطى ، $b = 50$

$h = b - a = 50 - 49 = 1$

$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow \acute{f}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(a) = \sqrt{a} \Rightarrow f(49) = \sqrt{49} = 7$

$\acute{f}(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \acute{f}(49) = \dfrac{1}{2\sqrt{49}} = \dfrac{1}{14} = 0.071$

$f(a+h) \cong f(a) + h\acute{f}(a)$

$f(49+1) \cong f(49) + (1)\acute{f}(49) \Rightarrow f(50) \cong 7 + (1)(0.071) = 7.071$

دراسة الدالة

النقطة الحرجة : هي النقطة التي تنتمي لمنحني الدالة والتي يكون عندها $\acute{f}(x) = 0$ أو تكون غير معرفة.

كيفية ايجاد النقط الحرجة

الحالة الأولى : نجد $\acute{f}(x)$ ثم نجعل $\acute{f}(x) = 0$ ثم نحل المعادلة المتكونة ونجد قيم x ولتكن $x_1 , x_2 , \dots$ ثم نعوض قيم (x) في الدالة الاصلية ونجد قيم (y) المقابلة لها فتكون $(x_1 , y_1), (x_2 , y_2), \dots$ هي النقط الحرجة.

مثال : جد النقط الحرجة للدوال التالية :

a) $f(x) = 3x^2 - 6x$

$\acute{f}(x) = 6x - 6 \qquad$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$6x - 6 = 0 \implies 6x = 6 \implies x = 1$

$y = f(1) = 3(1)^2 - 6(1) = 3 - 6 = -3 \qquad \therefore \ (1 , -3)$ نقطة حرجة

b) $f(x) = 2x + 3$

$\acute{f}(x) = 2 \qquad \acute{f}(x) = 0$ نجعل

$2 = 0$ غير ممكن لا توجد نقاط حرجة

c) $f(x) = \frac{3}{x}$

$f(x) = 3x^{-1} \implies \acute{f}(x) = -3x^{-2} \implies \acute{f}(x) = \frac{-3}{x^2} \qquad$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$\frac{-3}{x^2} = 0 \implies -3 = 0$ غير ممكن لا توجد نقاط حرجة

الحالة الثانية : اذا أعطيت نقطة حرجة يستفاد من ذلك في ايجاد الثوابت في الدالة المعطاة

مثال : لتكن $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ وكانت للدالة نقطة حرجة هي $(-1 , 10)$ فجد قيم الثوابت $a , b \in R$

الحل : $(-1 , 10)$ تحقق دالة المنحنى

$10 = (-1)^3 + a(-1)^2 - b + 5 \implies 10 = -1 + a - b + 5 \implies a - b = 6 \quad \dots\dots(1)$

$\acute{f}(x) = 3x^2 + 2ax + b \implies \acute{f}(-1) = 3(-1)^2 - 2a + b \quad , \quad f'(-1) = 0$

$3 - 2a + b = 0 \quad \dots\dots(2)$

وبحل المعادلتين آنيا نحصل على $a = -3 \quad , \quad b = -9$

أختبار التزايد والتناقص والنهايات العظمى والصغرى المحلية

ملاحظة : لإيجاد مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة (إن وجدت ونوعها نتبع ما يلي) :

١) نجد $\acute{f}(x)$ ونضعها تساوي صفراً ونستخرج قيم x .

٢) نجد صور x وذلك بتعويض قيم x في الدالة الأصلية $f(x)$ فتكون لدينا نقاط حرجة مرشحة .

٣) نختبر قيم x على إشارة $\acute{f}(x)$ ونستخرج مناطق التزايد والتناقص والنهايات العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) .

٤) لمعرفة نوع النقطة ، فاذا كان تغير اشارة المشتقة موجب الى سالب فالنقطة نهاية عظمى محلية ، اما اذا كان تغير اشارة المشتقة من سالب الى موجب فالنقطة نهاية صغرى محلية .

النهاية العظمى والنهاية الصغرى المحلية :

لتكن f دالة مستمرة على الفترة $[a , b]$ وقابلة للاشتقاق عند $(x = c)$ التي تنتمي الى الفترة المفتوحة (a , b) فاذا كانت :

اشارة $\acute{f}(x)$: a ++++++ ↗ | c | ------ ↘ b

$f(c)$ نهاية عظمى محلية

اشارة $\acute{f}(x)$: a ------- ↘ | c | +++++++ ↗ b

$f(c)$ نهاية صغرى محلية

ملاحظة : اذا كانت النقطة | حرجة فقط $(+ , +)$ or $(- , -)$ | نقطة نهاية صغرى $(- , +)$ | نقطة نهاية عظمى $(+ , -)$

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^2$

الحل :

$\acute{f}(x) = 2x \quad (\acute{f}(x) = 0$ نجعل$)$

$$[2x = 0] \div 2 \Rightarrow x = 0$$

اشارة $\acute{f}(x)$: ------- تناقص ↘ ($x < 0$) | 0 | +++++++ تزايد ↗ ($x > 0$)

f متزايدة في $\{x : x > 0\}$

f متناقصة في $\{x : x < 0\}$

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص والنهايات العظمى والصغرى (إن وجدت) لكل مما يأتي :

$1)\ f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

الحل :

$\acute{f}(x) = 9 + 6x - 3x^2 \qquad (\acute{f}(x) = 0$ نجعل$)$

$$[9 + 6x - 3x^2 = 0] \div -3$$

$$-3 - 2x + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

$$either\ \ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$or\ \ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

اشارة $\acute{f}(x)$: ------ تناقص ↘ ($x < -1$) | -1 (ن . ص) | + + + + + تزايد ↗ ($(-1 , 3)$) | 3 (ن . ع) | ------ تناقص ↘ ($x > 3$)

f متناقصة في $\{x : x < -1\} , \{x : x > 3\}$

f متزايدة في الفترة المفتوحة $(-1 , 3)$

$f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3 = -9 + 3 + 1 = -5$ نهاية صغرى محلية $(-1\,,-5)$

$f(3) = 9(3) + 3(3)^2 - (3)^3 = 27 + 27 - 27 = 27$ نهاية عظمى محلية $(3\,,27)$

ملاحظة : في حالة عدم امكانية مساواة المشتقة الأولى بالصفر نثبت على خط الاعداد القيمة التي تجعل المقام صفر على شكل فجوة .

2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

في هذه الحالة نجعل مقام $\acute{f}(x)$ يساوي صفراًونستخرج قيمة x .

أما $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0$ فتكون $\acute{f}(x)$ غير معرفة اذا كانت $(x = 0)$ اي ان $(x = 0)$ عدد حرج .

$[3x^{\frac{1}{3}} = 0\,] \div 3 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = 0$ بالجذر التكعيبي $x = 0$

اشارة $\acute{f}(x)$: $x < 0$: $- - - - -$ تناقص ↘ ، 0 ، $x > 0$: $+ + + + +$ تزايد ↗

لا توجد نهايات عظمى أو صغرى

f متزايدة في $\{x : x > 0\}$

f متناقصة في $\{x : x < 0\}$

---

3) $f(x) = 1 + (x - 2)^2$

$\acute{f}(x) = 2(x-2) \Rightarrow [2(x-2) = 0\,] \div 2$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = 1 + (2-2)^2 = 1 + 0 = 1$

اشارة $\acute{f}(x)$: $x < 0$: $- - - - -$ تناقص ↘ ، 0 ، $x > 0$: $+ + + + +$ تزايد ↗

$\therefore$ $(2\,,1)$ نهاية صغرى محلية

f متزايدة في $\{x : x > 2\}$

f متناقصة في $\{x : x < 2\}$

ملاحظة : هنالك ثلاث حالات لا يمكن أن نضع فيها $f'(x) = 0$ وهي :

1) اذا كانت $\acute{f}(x) = a$ حيث $a \in R$

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) = 3x$

الحل : كانت $\acute{f}(x) \neq 0$ $\therefore$ $\acute{f}(x) = 3 > 0$

$\therefore$ الدالة متزايدة $\forall x \in R$

يمكن ان تكون الدالة $f(x)$ متناقصة في حالة كون $\acute{f}(x)$ تساوي عدد سالب

2) اذا كانت [مجموع مربعين = $\acute{f}(x)$]

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^3 + x$

الحل : $\acute{f}(x) = 3x^2 + 1 > 0 \quad \therefore \ \acute{f}(x) \neq 0$

$\therefore$ الدالة متزايدة $\forall\, x \in R$ ولا توجد نقاط حرجة

3) إذا كانت $f'(x) = \frac{\text{ثابت}}{\text{متغير}}$

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

الحل :

$$\acute{f}(x) = \frac{(x-2)(1)-(x+1)(1)}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} \neq 0$$

(نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$\searrow$ — — — — — — — — (2) + + + + + + + $\nearrow$

القيمة التي تجعل المقام $= 0$

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص للدالة $y = x^3 - 3x$

$y' = 3x^2 - 3$ (نجعل $y' = 0$)

$[3x^2 - 3 = 0] \div 3$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$

1) $\{x : x > 1\}$ متزايدة y

2) $\{x : x < -1\}$ متزايدة y ... متناقصة في الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ y

$\nearrow$ + + + + + + + + (-1) — — — — — — — — $\searrow$ (1) + + + + + + + + $\nearrow$

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^4$

الحل :

$f'(x) = 4x^3$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$[4x^3 = 0] \div 4 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

مناطق التزايد $\{x : x > 0\}$ منطقة التناقص $\{x : x < 0\}$

$\searrow$ — — — — — — — (0) + + + + + + + $\nearrow$

مثال : جد مناطق التزايد والتناقص والنهايات العظمى والصغرى والنقاط الحرجة ان وجدت :

1) $f(x) = (x+1)^3$

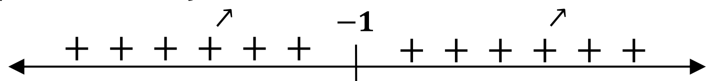
الحل :

$f'(x) = 3(x+1)^2.(1) = 3(x+1)^2$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

بالجذر $[3(x+1)^2 = 0] \div 3 \Rightarrow (x+1)^2 = 0$

نقطة حرجة مرشحة ولا توجد نقاط نهايات $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

الدالة متزايدة $\{x : x < -1\}$, $\{x : x > -1\}$



$$2)\ f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

الحل : الدالة الكسرية تحتاج الى مجال الدالة لايجاد النقطة الحرجة

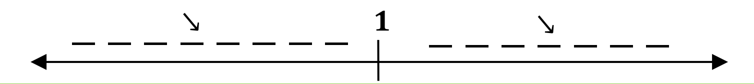
مجال الدالة $R/\{1\}$

$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

غير ممكن $\frac{-2}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow -2 = 0$

العدد الحرج $(x = 1)$ هو الذي يجعل المقام يساوي صفر

الدالة متناقصة في $\{x : x < 1\}$, $\{x : x > 1\}$



$$3)\ f(x) = 1 - (x-2)^2$$

الحل :

$f'(x) = -2(x-2)(1) \Longrightarrow f'(x) = -2x + 4$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$[-2x + 4 = 0] \div -2$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

مناطق التزايد $\{x : x > 2\}$ ، مناطق التناقص $\{x : x < 2\}$

$f(2) = 1 - (2-2)^2 = 1$

$\therefore$ النقطة $(2, 1)$ نهاية عظمى محلية

$+ + + + + +$ | 2 | $- - - - - - - - -$ اشارة $f'(x)$

$$4)\ f(x) = x^5$$

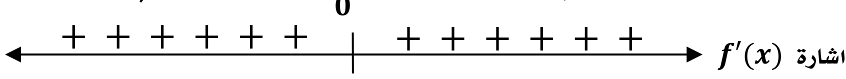
الحل :

$f'(x) = 5x^4$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$[5x^4 = 0] \div 5 \Longrightarrow x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$

$(0, 0)$ نقطة حرجة

مناطق التزايد $\{x : x > 0\}$, $\{x : x < 0\}$ لا توجد نهايات للدالة لأن الدالة متزايدة في مجالها



مثال : جد مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة مبينا نوعها ان وجدت

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

الحل :

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 18x + 24$ $\qquad$ ($\acute{f}(x) = 0$ نجعل)

$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-2) = 0$

$either \quad x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

$or \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

اشارة $\acute{f}(x)$: قبل 2: + + + + + تزايد ↗ ، بين 2 و 4: − − − − − تناقص ↘ ، بعد 4: + + + + + تزايد ↗

f متناقصة في الفترة المفتوحة $(2,4)$

f متزايدة في $\{x : x < 2\}, \{x : x > 4\}$

$f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2) = 8 - 36 + 48 = 20$ $\qquad$ $(2,20)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4) = 64 - 144 + 96 = 16$ $\qquad$ $(4,16)$ نقطة نهاية صغرى محلية

تقعر وتحدب المنحنيات ونقط الانقلاب

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b) فيقال عن الدالة f بأنها محدبة اذا كانت $f'(x)$ متناقصة خلال تلك الفترة وتسمى مقعرة اذا كانت $f'(x)$ متزايدة خلال تلك الفترة .

ملاحظة : لإيجاد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب نتبع ما يلي :

1) نجد $\acute{f}(x)$ ونضعها تساوي صفراً ونستخرج قيم x .

2) اذا كانت $f''(x)$ موجبة $[f''(x) > 0]$ فالدالة مقعرة .

اذا كانت $f''(x)$ سالبة $[f''(x) < 0]$ فالدالة محدبة .

3) نعوض قيم x في الدالة الاصلية $f(x)$ لايجاد نقطة الانقلاب .

4) اذا لم يحدث تغير في اشارة المشتقة الثانية فلا توجد هناك نقاط انقلاب للدالة .

5) اذا كانت المشتقة الثانية مجموع مربعين فإن الدالة مقعرة في مجالها ولا توجد نقاط انقلاب .

نقطة الأنقلاب : هي نقطة تنتمي لمنحنى الدالة وتكون فيها المشتقة الثانية تساوي صفراًاو غير معرفة ، والتي تتغير فيها اشارة المشتقة الثانية من تحدب الى تقعر او بالعكس .

مثال : جد نقاط الانقلاب للمنحني : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

الحل :

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f''(x) = 12x - 6$ (نجعل $f''(x) = 0$)

$12x - 6 = 0 \Rightarrow 12x = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{-11}{2}$

f مقعرة في $\{x : x > \frac{1}{2}\}$ لأن $f''(x)$ موجبة

f محدبة في $\{x : x < \frac{1}{2}\}$ لأن $f''(x)$ سالبة

النقطة $\left(\frac{1}{2}, \frac{-11}{2}\right)$ هي نقطة إنقلاب

اشارة $f''(x)$: ‎ $- - - - - - -$ محدبة $\cap$ | $\frac{1}{2}$ | $+ + + + +$ تقعر $\cup$

مثال : جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب (ان وجدت) للدوال الاتية :

a) $f(x) = 4x^3 - x^4$

الحل :

$f'(x) = 12x^2 - 4x^3$

$f''(x) = 24x - 12x^2$ (نجعل $f''(x) = 0$)

$[24x - 12x^2 = 0] \div 12 \Rightarrow 2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0$

$either\ x = 0$

$or\ 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(0) = 4(0)^3 - (0)^4 = 0$ نقطة انقلاب $(0, 0)$

$f(2) = 4(2)^3 - (2)^4 = 32 - 16 = 16$ نقطة انقلاب $(2, 16)$

مقعرة في الفترة $(0, 2)$ ومحدبة في $\{x : x > 2\}$ ، $\{x : x < 0\}$

اشارة $f''(x)$: ‎ $x < 0$: $- - - - - - -$ محدبة $\cap$ | 0 | فترة $(0,2)$: $+ + + + +$ تقعر $\cup$ | 2 | $x > 2$: $- - - - - - -$ محدبة $\cap$

---

b) $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$

$f(x) = x + x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 1 - x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-3}$

$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0$ $\qquad$ (نجعل $f''(x) = 0$)

∴ لا توجد نقاط انقلاب لأن 0 لا ينتمي لمجال الدالة فنجعل المقام = 0

$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

f مقعرة في $\{x : x > 0\}$

f محدبة في $\{x : x < 0\}$

اشارة $\acute{\acute{f}}(x)$: محدبة ⋒ $- - - - - - -$ ($x < 0$) | 0 | $+ + + + +$ تقعر ⋓ ($x > 0$)

ملاحظة : الحالات الثلاث التي تنطبق على $\acute{f}(x)$ والتي تجعلها لا تساوي صفراً هي نفسها تنطبق على $\acute{\acute{f}}(x)$ وكذلك تنطبق على $f(x)$.

ملاحظة : يستفاد من نقطة الانقلاب في ايجاد الثوابت كما هو الحال في النقطة الحرجة .

c) $h(x) = 4 - (x+2)^4$

$\acute{h}(x) = -4\,(x+2)^3$

$\acute{\acute{h}}(x) = -12\,(x+2)^2$ $\qquad$ (نجعل $h''(x) = 0$)

$[-12\,(x+2)^2 = 0\,] \div (-12) \Rightarrow (x+2)^2 = 0$ $\qquad$ بالجذر التربيعي

$\therefore x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

لا توجد نقاط انقلاب عند $x = -2$ ، h محدبة في $\{x : x < -2\}$, $\{x : x > -2\}$

اشارة $\acute{\acute{h}}(x)$: محدبة ⋒ $- - - - - - -$ ($x < -2$) | -2 | $- - - - - - -$ محدبة ⋒ ($x > -2$)

d) $f(x) = 3 - 2x - x^2$

الحل :

$\acute{f}(x) = -2 - 2x$

$\acute{\acute{f}}(x) = -2 < 0 \quad \therefore \acute{\acute{f}}(x) \neq 0$

∴ لا توجد نقاط انقلاب والدالة f محدبة $\forall x \in R$.

e) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 3$

الحل :

$\acute{f}(x) = 4x^3 + 6x$

$\acute{\acute{f}}(x) = 12x^2 + 6 > 0 \quad (\acute{\acute{f}}(x) \neq 0)$

∴ لا توجد نقاط انقلاب والدالة f مقعرة $\forall x \in R$

أستخدام المشتقة الثانية لفحص النهايات العظمى والصغرى المحلية :

من الممكن إستخدام الطريقة الاتية لمعرفة نوع النقطة الحرجة (عظمى أو صغرى)

1. نجد $\acute{f}(x)$ ، $\acute{\acute{f}}(x)$
2. نجد قيم x التي تجعل $\acute{f}(x) = 0$ ونعوضها في $\acute{\acute{f}}(x)$ فإذا كانت الاشارة بعدالتعويض :
   a. موجبة فالنقطة الحرجة تمثل نقطة نهاية صغرى محلية .
   b. سالبة فالنقطة الحرجة تمثل نقطة نهاية عظمى محلية .
   c. تساوي صفراً فإن هذه الطريقة فاشلة في معرفة نوع النقطة الحرجة ، ويعاد الاختبار بواسطة الطريقة السابقة عن طريق المشتقة الأولى .

مثال : بإستخدام أختبار المشتقة الثانية إن أمكن جد النهايات المحلية للدوال الاتية:

a) $f(x) = 6x - 3x^2 - 1$

$\acute{f}(x) = 6 - 6x$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$6 - 6x = 0 \Rightarrow 6 = 6x \Rightarrow x = 1$

$\acute{\acute{f}}(x) = -6 < 0$

$\therefore$ توجد نهاية عظمى محلية عند $x = 1$

$f(1) = 6(1) - 3(1)^2 - 1 = 2$

$\therefore$ $(1, 2)$ نقطة نهاية عظمى محلية

b) $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $x \neq 0$

$f(x) = x - 4x^{-2}$

$\acute{f}(x) = 1 + 8x^{-3}$

$\acute{f}(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$[1 + \frac{8}{x^3} = 0] \times x^3 \Rightarrow x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$

$\acute{f}(x) = 1 + 8x^{-3}$

$\acute{\acute{f}}(x) = -24x^{-4} \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = \frac{-24}{x^4}$

$\acute{\acute{f}}(-2) = \frac{-24}{(-2)^4} = \frac{-24}{16} = \frac{-3}{2} < 0$

$f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - 1 = -3$

$\therefore$ $(-2, -3)$ نقطة نهاية عظمى محلية

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 6x - 9$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$[3x^2-6x-9=0\ ]\div 3$

$x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow\ x=3\ ,\ x=-1$

$f''(x)=6x-6$

عندما $x=-1$

فأن $f'(-1)=0\ ,\ f''(-1)=-12<0$

∴ توجد نهاية عظمى محلية عند $(x=-1)$

∴ النهاية العظمى المحلية هي : $f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9(-1)=-1-3+9=5$

عندما $x=3$

فإن $f'(3)=0$ و $f''(3)=12>0$

∴ توجد نهاية صغرى محلية عند $(x=3)$

∴ النهاية الصغرى المحلية هي : $f(3)=(3)^3-3(3)^2-9(3)=27-27-27=-27$

d) $f(x)=4-(x+1)^4$

$f'(x)=\ -4(x+1)^3$ (نجعل $f'(x)=0$)

$-4(x+1)^3=0\ \Rightarrow (x+1)^3=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}\ ,\ \boxed{f'(-1)=0}$

$f''(x)=\ -12(x+1)^2 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}\ ,\ \boxed{f''(-1)=0}$

∵ $f''(-1)=0$ هذه الطريقة لا تصح لذا نعود الى ملاحظة تغير اشارة f' بجوار $(x=-1)$

اشارة $f'(x)$:
تزايد ↗ : + + + + + + | -1 | تناقص ↘ : − − − − − −

f متزايدة في $\{x:\ x\ <\ 0\}$

f متناقصة في $\{x:\ x>-1\}$

∴ توجد نهاية صغرى محلية هي : $f\ (-1)=4-(-1+1)^4=4$

ملاحظة : في حالة عدم امكانية مساواة المشتقة الثانية بالصفر نثبت على خط الاعداد الحقيقة القيمة التي تجعل المقام يساوي صفر .

مثال : جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب ان وجدت للدوال التالية :

1) $f(x)=4-(x+2)^2$

الحل :

$f'(x)=-2(x+2).(1)=-2x-4$

$f''(x)=-2\ <0$

الدالة محدبة في مجالها ولا توجد نقاط انقلاب

$1)\ f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$

الحل :

$f'(x) = 4x^3 + 6x$

$f''(x) = 12x^2 + 6 > 0$

الدالة مقعرة في مجالها ولا توجد نقاط انقلاب

مثال : جد نقاط الانقلاب للمنحني $f(x) = (x-2)(x+1)^2$ ثم جد معادلة المماس للمنحني عند نقطة انقلابه . (وزاري ٢٠٠٥ / د ٢)

الحل :

$f(x) = (x-2)(x^2+2x+1)$

$f'(x) = (x-2)(2x+2) + (x^2+2x+1)\ (1)$

$f'(x) = 2x^2 + 2x - 4x - 4 + x^2 + 2x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$ (نجعل $f''(x) = 0$)

$6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = (0-2)(0+1)^2 = -2$ $(0, -2)$ نقطة انقلاب

$m = f'(x) = f'(0) = -3$

$(y - y_1) = m(x - x_1)$

$(y - (-2)) = -3(x - 0)$

$y + 2 = -3x \Rightarrow 3x + y + 2 = 0$

ايجاد الثوابت

ملاحظات حول أسئلة الثوابت :

1) اذا أعطي في السؤال نهاية عظمى أو صغرى أو نقطة حرجة ، فنجد المشتقة الأولى ، ونعوض النهاية فيها ونجعلها تساوي صفراً .

2) اذا أعطي في السؤال نقطة أنقلاب ، نجد المشتقة الثانية ونعوض نقطة الانقلاب فيها ونجعلها تساوي صفراً .

3) اذا أعطي في السؤال معادلة المماس نتبع ما يلي :

a) نجد ميل المماس من المشتقة الأولى عند نقطة التماس b) نجد ميل المماس = $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$ c) نساوي الميلين

4) كل زوج مرتب يعطى في السؤال يعوض في الدالة الاصلية

5) كل نهاية لم يذكر الاحداثي لها يعتبر احداثي صادي (y) .

6) كل مستقيم يوازي محور السينات فإن ميله = صفراً

7) المنحنيات المتماسة ميلاهما متساوي .

مثال : عين قيمتي الثابتين a , b لكي يكون لمنحني الدالة $y = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 2$ ثم جد نقطة الانقلاب .

الحل :

$y = x^3 + ax^2 + bx \Rightarrow y' = 3x^2 + 2a\,x + b$

∵ للدالة نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ فان $y' = 0$

$0 = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b$

$3 - 2a + b = 0 \Rightarrow -2a + b = -3 \ldots\ldots(1)$

∵ للدالة نهاية صغرى محلية عند $x = 2$ فان $y' = 0$

$0 = 3(2)^2 + 2a(2) + b$

$12 + 4a + b = 0 \Rightarrow 4a + b = -12 \ \ldots.(2)$

$-2a + b = -3 \ \ldots\ldots\ (1)$

$\mp 4a \mp b = \pm 12 \ldots..(2)$ بالطرح

$-6a = 9 \Rightarrow a = \frac{-9}{6} \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$ نعوض في (1)

$-2\left(\frac{-3}{2}\right) + b = -3 \Rightarrow b = -6$

$y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$

$y' = 3x^2 - 3x - 6$

$y'' = 6x - 3$ ($y'' = 0$ نجعل)

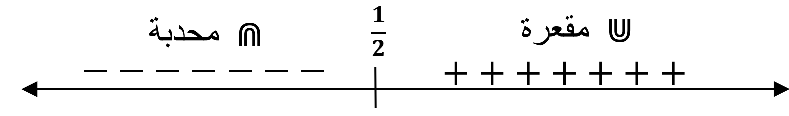
$6x - 3 = 0 \Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

نقطة الانقلاب هي $\left(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4}\right)$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right)$

$y = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - 3 = \frac{1 - 3 - 24}{8} = \frac{-26}{8} = \frac{-13}{4}$

الدالة f مقعرة في $\{x : x > \frac{1}{2}\}$ ، الدالة f محدبة في $\{x : x < \frac{1}{2}\}$



مثال : اذا كانت الدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ونقطة الانقلاب عند $x = 1$ فجد قيمة $a , c \in R$.

الحل :

$f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$

$f'(x) = 3ax^2 + 6x$

$f''(x) = 6ax + 6 \quad (f''(x) = 0$ نجعل$)$

$\because$ للدالة نقطة انقلاب عند $x = 1 \Leftarrow f''(x) = 0$

$6ax + 6 = 0$

$6a(1) + 6 = 0 \Rightarrow 6a = -6 \Rightarrow a = -1$

$f'(x) = 3ax^2 + 6x$

$f'(x) = -3x^2 + 6x \quad (f'(x) = 0$ نجعل$)$

$-3x^2 + 6x = 0 \,] \div 3 \Rightarrow -x^2 + 2x = 0] \times -1$

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$

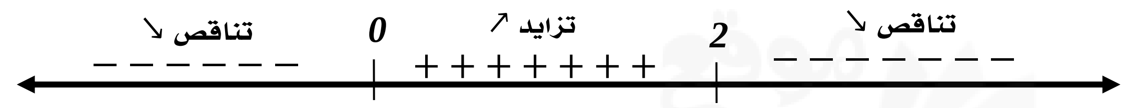
اما $x = 0$

أو $x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$

الدالة تمتلك نهاية عظمى محلية 8 وإن النقطة $(2, 8)$ نقطة نهاية عظمى $x = 2$, $y = 8$ تحقق المعادلة

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

$8 = -(2)^3 + 3(2)^2 + c \Rightarrow 8 = -8 + 12 + c \Rightarrow c = 16 - 12 = 4$



مثال : لتكن $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ دالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$ جد قيمة a ثم بين هل ان الدالة تمتلك نهاية عظمى محلية . وزاري ٢٠١٨ / د١

الحل :

$f(x) = x^2 + ax^{-1}$

$f'(x) = 2x - ax^{-2}$

$f''(x) = 2 + 2ax^{-3} = 2 + \frac{2a}{x^3} \quad (f''(x) = 0$ نجعل$) \quad , \quad x = 1$

$2 + 2a = 0 \Longrightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$

$f(x) = x^2 + \frac{a}{x} \quad \Longrightarrow f(x) = x^2 + (\frac{-1}{x})$

$f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0$

$[2x + \frac{1}{x^2} = 0\,] \,.\, x^2$

$2x^3 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^3 = -1 \Rightarrow x^3 = \frac{-1}{2} \Rightarrow \; x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}\right) = 2 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} = 2 + 4 = 6 \; > \; 0$

∴ توجد نهاية صغرى عند $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$ ولا تملك نهاية عظمى محلية .

مثال : اذا كان منحني الدالة : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ مقعر في $\{x : x < 1\}$ ومحدب في $\{x : x > 1\}$ ويمس المستقيم $y + 9x = 28$ عند النقطة $(3\,,1)$ فجد قيم الاعداد الحقيقية $a\,,b\,,c$.

الحل : وزاري ٢٠١٤ /د١

∵ الدالة مستمرة لأنها كثيرة حدود ومقعرة في $\{x : x < 1\}$ ومحدبة في $\{x : x > 1\}$

∴ الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(1) = 6a + 2b$ (نجعل $f''(1) = 0$)

$6a + 2b = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

∵ ميل المماس للمستقم $y + 9x = 28$

$y' + 9 = 0 \Rightarrow y' = -9 \qquad \therefore m = -9$

∴ $f'(3)$ هو الميل للمماس لمنحني الدالة عند $x = 3$

$f'(3) = 3a(3)^2 + 2b(3) = 27a + 6b$ (ميل المماس)

$\therefore 27a + 6b = -9\,] \div 3$

$9a + 2b = -3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$6a + 2b = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$\mp 9a \mp 2b = \pm 3 \ldots\ldots\ldots(2)$ بالطرح

$-3a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{-3} \Rightarrow a = -1$

وبالتعويض عن قيمة a في المعادلة (1) نحصل على :

$6(-1) + 2b = 0 \Rightarrow -6 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$

∴ $(3\,,1) \in$ للمنحني فهي تحقق معادلة المنحني $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$

$1 = (-1)(3)^3 + 3(3)^2 + c \Rightarrow 1 = -27 + 27 + c \Rightarrow c = 1$

حل تمارين (3 – 4)

س1 : لتكن $f(x) = a x^2 - 6x + b$ حيث $b \in R$, $a \in \{-4, 8\}$ جد قيمة a اذا كانت :

أ) الدالة f محدبة ب) الدالة f مقعرة

الحل :

$$f(x) = a x^2 - 6x + b$$

$$f'(x) = 2a x - 6$$

$$f''(x) = 2a$$

أ) الدالة f محدبة

$$f''(x) < 0 \Rightarrow 2a < 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow a = -4$$

ب) الدالة f مقعرة

$$f''(x) > 0 \Rightarrow 2a > 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a = 8$$

س2: اذا كانت $(2, 6)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x) = a - (x - b)^4$ فجد a, b وبين نوع النقطة الحرجة.

الحل :

$\because (2, 6) \in$ للمنحني فهي تحقق معادلة المنحني

$$f(x) = a - (x - b)^4$$

$$f'(x) = -4(x - b)^3 \Rightarrow -4(2 - b)^3 = 0\,] \div (-4)$$

نجعل $f'(x) = 0$ عندما $x = 2$ لأن النقطة $(2, 6)$ نقطة حرجة .

$$(2 - b)^3 = 0 \Rightarrow 2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$$

$$6 = a - (2 - b)^4 \quad \dots\dots\dots (1)$$

وبالتعويض عن قيمة (b) في المعادلة (1) نحصل على :

$$6 = a - (2 - 2)^4 \Rightarrow a = 6$$

$$f'(x) = -4(x - b)^3 \Rightarrow f'(x) = -4(x - 2)^3$$

$\therefore (2, 6)$ تمتلك نهاية عظمى محلية

تزايد ↗ $+ + + + + +$ | 2 | $- - - - -$ تناقص ↘

$x < 2$ | $x > 2$

س3 : اذا كان $f(x) = a x^3 + bx^2 + cx$, $g(x) = 1 - 12x$ وكان كل من f, g متماسان عند نقطة انقلاب المنحني f وهي $(1, -11)$ فجد قيمة الثوابت $a, b, c \in R$. وزاري ٢٠١٤ / د٢

الحل :

$\because$ الدالتين $g(x)$, $f(x)$ متماستان عند نقطة الانقلاب

∴ ميل الدالتين $f(x), g(x)$ عند $(x=1)$ متساويان اي ان $\acute{f}(x) = \acute{g}(x)$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow \acute{f}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$g(x) = 1 - 12x \Rightarrow \acute{g}(x) = -12$

$3ax^2 + 2bx + c = -12 \Rightarrow 3a(1)^2 + 2b(1) + c = -12 \Rightarrow 3a + 2b + c = -12 \dots (1)$

∵ النقطة $(1,-11)$ نقطة انقلاب للدالة $f(x)$ فإن $\acute{\acute{f}}(x) = 0$ عندما $x = 1$

$\acute{\acute{f}}(x) = 6ax + 2b \Rightarrow 6a + 2b = 0\ ] \div 2 \Rightarrow 3a + b = 0 \dots (2)$

النقطة $(1,-11)$ تحقق معادلة المنحني $f(x)$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow -11 = a + b + c \dots (3)$

وبحل المعادلات (1) ، (2) ، (3) آنيا سوف نحصل على

$3a + 2b + c = -12 \quad \dots (1)$

$\mp a \mp b \mp c = \pm 11 \quad \dots (3)$ بالطرح

$2a + b = -1 \dots (4)$

$\mp 3a \mp b = 0 \quad \dots (2)$ بالطرح

$-a + 0 = -1 \Rightarrow a = 1$ نعوض في (٢)

$b = -3a \Rightarrow b = -3$ نعوض في (٣)

$a + b + c = -11 \Rightarrow c = -11 - a - b = -11 - 1 + 3 \Rightarrow c = -9$

س4: اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ فجد قيمة c ثم جد معادلة المماس للمنحني في نقطة انقلابه .

الحل :

$f(x) = 3x^2 - x^3 + c \Rightarrow \acute{f}(x) = 6x - 3x^2 \quad (\acute{f}(x) = 0$ نجعل$)$

$6x - 3x^2 = 0\ ] \div 3 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0$

$x = 0 \quad or \quad 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

اشارة $\acute{f}(x)$	$x < 0$	0	فترة $(0,2)$	2	$x > 2$
	- - - - - - - - - - - - -	ن . ص	+ + + + + + + + + +	ن . ع	- - - - - - - - - - - - - -
	تناقص ↘		تزايد ↗		تناقص ↘

$(0,6)$ نهاية صغرى محلية وتحقق معادلة المنحني

$f(x) = 3x^2 - x^3 + c \Rightarrow 6 = 3(0)^2 - (0)^3 + c \Rightarrow c = 6$

$\acute{f}(x) = 6x - 3x^2 \implies \acute{\acute{f}}(x) = 6 - 6x \quad (\acute{\acute{f}}(x) = 0$ نجعل$)$

$6 - 6x = 0 \implies 6 = 6x \implies x = 1$

$f(1) = 3(1)^2 - (1)^3 + 6 = 3 - 1 + 6 = 8$

$(1, 8)$ نقطة انقلاب (نقطة ميل المماس) اي نحسب $\acute{f}(x)$ عندما $x = 1$

$\acute{f}(1) = 6(1) - 3(1)^2 = 6 - 3 = 3$ ميل المماس

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 8 = 3(x - 1)$

$y - 8 = 3x - 3 \Rightarrow y - 8 - 3x + 3 = 0$

$y - 3x - 5 = 0$ معادلة المماس للمنحني عند نقطة انقلابه

س5 : اذا كان $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكانت f مقعرة $(\forall x > 1)$ محدبة $(\forall x < 1)$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1, 5)$ فجد قيمة الثوابت $a, b, c \in R$. وزاري ٢٠١٢ / د٣

الحل :

النقطة $(-1, 5)$ تحقق دالة المنحني

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow 5 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1)$

$-a + b - c = 5 \;......(1)$

النقطة $(-1, 5)$ نقطة نهاية عظمى محلية للدالة f فنجعل $\acute{f}(x) = 0$ عندما $x = -1$

$\acute{f}(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0$

$3a - 2b + c = 0 \;.....(2)$

$\because$ الدالة f مقعرة $(\forall x > 1)$ محدبة $(\forall x < 1)$ $\therefore$ نجعل $\acute{\acute{f}}(x) = 0$ عندما $x = 1$ لأنه توجد نقطة انقلاب

$\acute{\acute{f}}(x) = 6ax + 2b \Rightarrow 6a(1) + 2b = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \;.....(3)$

$-a + b - c = 5 \;......(1)$

$\underline{3a - 2b + c = 0 \;.....(2)}$ بالجمع

$2a - b = 5 \;.......(4)] \times 2$

$\underline{6a + 2b = 0 \;.....(3)}$

$4a - 2b = 10 \;...(4)$

$\underline{6a + 2b = 0 \;.....(3)}$ بالجمع

$10a + 0 = 10 \Rightarrow 10a = 10 \Rightarrow a = 1$ نعوض في (٣)

$6a + 2b = 0 \implies 6(1) + 2b = 0 \implies 2b = -6 \implies b = -3$

$c = -a + b - 5 = -1 + (-3) - 5 \Rightarrow c = -9$

س6 : لتكن $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, $a \in R/\{0\}$ برهن ان الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية .

(وزاري ٢٠١٣/د١)

الحل :

$f(x) = x^2 - a x^{-1} \Rightarrow \acute{f}(x) = 2x + ax^{-2} = 2x + \frac{a}{x^2}$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$\left[2x + \frac{a}{x^2} = 0\right] \Rightarrow \frac{a}{x^2} = -2x \Rightarrow a = -2x^3 \Rightarrow x^3 = \frac{-a}{2}$ ....(1)

$\acute{\acute{f}}(x) = 2 - 2ax^{-3} = 2 - \frac{2a}{x^3}$

$\acute{\acute{f}}\left(\frac{-a}{2}\right) = 2 - \frac{2a}{\frac{-a}{2}} = 2 - 2a\left(\frac{-2}{a}\right) = 2 + 4 = 6 > 0$, $\acute{\acute{f}}(x) > 0$

∴ الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية مهما كانت قيمة a .

∴ الدالة f تمتلك نهاية صغرى محلية مهما كانت قيمة a .

س7 : المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند $(2,-1)$ وكانت له نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيمة $a, b, c \in R$ وما نوع النهاية ؟ وزاري ٢٠١٥ / د١ وزاري ٢٠١٦ /د١

الحل : النقطة $(2,-1)$ تحقق معادلة المنحني

$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow -1 = a(2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 4a + 2b + c = -1$ ....(1)

∵ للمنحني نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$ فإن $\acute{y} = 0$ عندما $x = \frac{1}{2}$

$\acute{y} = 2ax + b \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow 2a\left(\frac{1}{2}\right) + b = 0 \Rightarrow a + b = 0$ ....(2)

∴ نجد معادلة ميل المستقيم المماس من معادلته $3x - y = 7$

ميل المماس $= \frac{-3}{-1} = 3$

∴ نجد ميل منحني الدالة عند نقطة التماس (اي نجد $\acute{y}$ عندما $x = 2$)

$\acute{y} = 2ax + b = 2a(2) + b \Rightarrow \acute{y} = 4a + b$

∵ ميل المستقيم المماس = ميل المنحني للدالة عند نقطة التماس

$\acute{y} = 4a + b \Rightarrow 4a + b = 3$ ....(3)

$a + b = 0$ ....(2)

$\mp 4a \mp b = \mp 3$ ....(3) بالطرح

$-3a = -3 \Rightarrow a = 1$ نعوض في (٢)

$1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$ نعوض في (١)

$4(1) + 2(-1) + c = -1 \Rightarrow 4 - 2 + c = -1 \Rightarrow 2 + c = -1 \Rightarrow c = -3$

$y = x^2 - x - 3$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} - 3 = -3\frac{1}{4}$$

$\left(\frac{1}{2}, -3\frac{1}{4}\right)$ تمثل نهاية صغرى محلية

تناقص ↘ — — — — — | $\frac{1}{2}$ | + + + + + تزايد ↗

أمثلة اضافية محلولة

مثال : جد ان وجدت مناطق التزايد والتناقص والنقط الحرجة وقيم نقاط النهايات للدوال الاتية :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad (f'(x) = 0$ نجعل$)$

$3x^2 - 6x = 0] \div 3 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad , \quad x = 2$

$either \quad x = 2 \Rightarrow y = -4 \quad or \quad x = 0 \Rightarrow y = 0$

∴ النقط الحرجة هي $(2, -4), (0, 0)$

النقطة $(0, 0)$ نهاية عظمى محلية وقيمة النهاية العظمى المحلية تساوي (0)

النقطة $(2, -4)$ نهاية صغرى محلية وقيمة النهاية الصغرى المحلية تساوي (-4)

مناطق التزايد $\{x : x < 0\}$ ، $\{x : x > 2\}$

مناطق التناقص = الفترة $(0, 2)$

$\nearrow x < 0$ + + + + + | 0 | تناقص ↘ — — — — — — | 2 | $\nearrow x > 2$ + + + + + +

b) $f(x) = 2x + 3$

$f'(x) = 2 \qquad \left(f'(x) = 0 \right.$ لا يمكن جعل$\left.\right) \qquad 0 \neq 2$

∴ لا توجد نقط حرجة

مناطق التزايد $\{x : \forall x \in R\}$

↗ + + + + + + | 2 | ↗ + + + + +

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)2x - (x^2+1)(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 - 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-10x}{(x^2-4)^2}$$

$$\frac{-10x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow -10x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{-1}{4}$$

∴ النقطة الحرجة $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ تمثل نهاية عظمى محلية ، قيمة النهاية العظمى المحلية $= -\frac{1}{4}$

مناطق التزايد $\begin{cases} x : x < -2 \\ (-2\,,0) \end{cases}$ الفترة

مناطق التناقص $\begin{cases} x : x > 2 \\ (0,2) \end{cases}$ الفترة

$$\nearrow \quad -2 \quad \nearrow \quad 0 \quad \searrow \quad 2 \quad \searrow$$
$$+ + + + + + \;|\; + + + + + + \;|\; - - - - \;|\; - - - - - - -$$

مثال : اذا كانت $f(x) = 3 + bx + cx^2$ تمتلك نقطة حرجة هي $(1,4)$ جد قيمة $b \in R$ ثم بين نوع النقطة الحرجة .

الحل :

$f(x) = 3 + bx + cx^2$

$f'(x) = b + 2cx \qquad (f'(x) = 0$ عند الحرجة$)$

$b + 2cx = 0 \qquad\qquad x = 1$ عند

$b + 2c = 0 \;\dots\dots (1)$

$f(x) = 3 + bx + cx^2 \qquad (1,4)$ تحقق المعادلة

$4 = 3 + b + c \Longrightarrow b + c = 1 \quad \dots\dots(2)$

$b + 2c = 0 \;\dots\dots (1)$

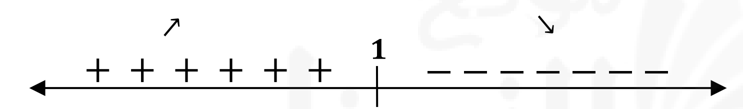
$\mp b \mp c = \mp 1 \dots\dots(2)$ بالطرح

$c = -1$

$b - 1 = 1 \Rightarrow b = 2$

$f'(x) = 2 - 2x \qquad (f'(x) = 0$ نجعل$)$

$2 - 2x = 0 \Longrightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \qquad \therefore (1,4)$ نهاية عظمى محلية



مثال : اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2$ جد قيمة $a\,,b$ اذا علمت ان للمنحني نقطة انقلاب $(1,2)$. وزاري ٢٠٠٧/د١

الحل :

$\because (1,2)$ تحقق معادلة المنحني

$f(x) = ax^3 + bx^2$

$2 = a(1)^3 + b(1)^2 \Longrightarrow a + b = 2 \;\dots\dots\dots (1)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 6ax + 2b \qquad (f''(x) = 0) \qquad (x = 1$ عند$)$

$6a + 2b = 0] \div 2 \Longrightarrow 3a + b = 0 \;\dots\dots\dots (2)$

$a + b = 2 \ldots\ldots.\ldots(1)$

$\mp 3a \mp b = 0 \ldots\ldots(2)$ بالطرح

$-2a = 2 \Rightarrow a = -1$ (1) نعوض قيمة a في معادلة

$-1 + b = 2 \Rightarrow b = 3$

مثال : اذا علمت ان للدالة $f(x) = ax^3 + bx$ حيث $a, b \in R$ نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1, 2)$ جد قيمة a, b .

الحل :

$f(x) = ax^3 + bx \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(-1) = 3a(-1)^2 + b \Rightarrow 3a + b = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$\because (-1, 2) \ni$ للمنحني فهي تحقق معادلة المنحني

$f(x) = ax^3 + bx$

$2 = a(-1)^3 + b(-1) \Rightarrow 2 = -a - b \ldots\ldots\ldots..(2)$

$3a + b = 0 \quad \ldots\ldots\ldots.(1)$

$-a - b = 2 \quad \ldots\ldots\ldots.(2)$ بالجمع

$2a = 2 \Rightarrow \therefore a = 1$ نعوض في معادلة (١)

$3(1) + b = 0 \Rightarrow 3 + b = 0 \Rightarrow b = -3$

حلول الاسئلة الوزارية حول ايجاد الثوابت

س : اذا كان $(1, 6)$ تمثل نهاية صغرى محلية للدالة $f(x) = ax^2 + (x - b)^2$ جد قيمة كل من a, b الحقيقيتين الموجبتين . وزاري ١٩٩٨ / د١

الحل : $\because (1, 6)$ تحقق معادلة الدالة والمشتقة عندها تساوي صفر

$f(x) = ax^2 + (x - b)^2$

$6 = a(1)^2 + (1 - b)^2$

$6 = a + 1 - 2b + b^2 \ldots\ldots(1)$

$f'(x) = 2ax + 2(x - b) \Rightarrow 2a(1) + 2(1 - b) = 0$

$2a + 2 - 2b = 0 \,] \div 2 \Rightarrow a + 1 - b = 0 \Rightarrow a = b - 1 \ldots\ldots(2)$ نعوض في (١)

$\therefore 6 = b - 1 + 1 - 2b + b^2 \Rightarrow b^2 - b - 6 = 0$

$(b - 3)(b + 2) = 0$

$either \;\; b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = 3 - 1 = 2$

$or \quad b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$ يهمل

س : اذا كان منحني $f(x) = x^3 - bx^2 + cx$ يمر بالنقطة $(-2,-2)$ وكانت للدالة نقطة أنقلاب عند $x = 1$ جد قيمتي كل من $b, c \in R$ ثم جد نقطة النهاية العظمى المحلية للدالة f . وزاري ١٩٩٩ / د٢

الحل : $\because$ $(-2,-2)$ تنتمي للدالة فهي تحقق معادلة الدالة

$$f(x) = x^3 - bx^2 + cx$$

$$-2 = (-2)^3 - b(-2)^2 + c(-2) \Rightarrow -2 = -8 - 4b - 2c\,] \div 2$$

$$-1 = -4 - 2b - c \Rightarrow -2b - c = 3 \;\ldots\ldots(1)$$

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 2bx + c$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = 6x - 2b \qquad \acute{\acute{f}}(x) = 0$$

$$6(1) - 2b = 0 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow \therefore b = 3$$

$$-2(3) - c = 3 \Rightarrow -6 - c = 3 \Rightarrow \therefore c = -9$$

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 2(3)x + (-9) \Rightarrow \acute{f}(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0\,] \div 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

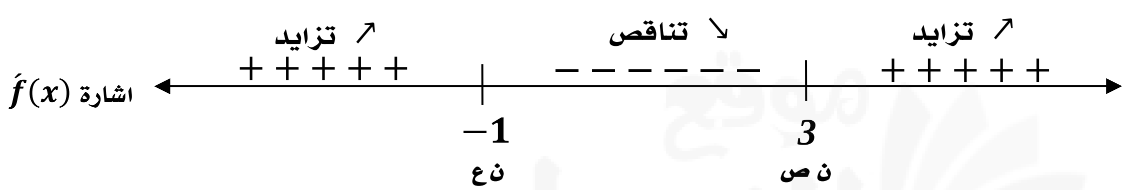
$$either \quad x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$or \quad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$$

$(-1,5)$ نهاية عظمى محلية



س : جد نقطة الانقلاب لمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x - 2$ ثم جد معادلة مماس المنحني عند نقطة انقلابه . وزاري ٢٠٠٢ / د٢

الحل :

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = 6x$$

$6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = -2$ $\therefore$ نقطة الانقلاب $(0,-2)$

$\acute{f}(0) = 3(0)^2 - 3 = -3$ ميل المماس عند نقطة انقلابه

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = -3(x - 0)$$

$y + 2 = -3x \Rightarrow 3x + y + 2 = 0$ معادلة المماس

	$x < 0$	0	$x > 0$
اشارة $\acute{\acute{f}}(x)$	− − − − − − (تحدب ⋒)		+ + + + + (تقعر ⋓)

ن انقلاب

س : لتكن $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$ ، $(-1, 2)$ نقطة نهاية عظمى محلية للدالة جد قيمتي $b, c \in R$ وهل توجد نقطة أنقلاب للدالة ؟ وزاري ٢٠٠٥ / د١

الحل : $\because (-1, 2)$ تنتمي للدالة فهي تحقق معادلة الدالة

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$

$2 = -1 + b - c + 1$

$b - c = 2 \ldots\ldots(1)$

$\acute{f}(x) = 3x^2 + 2bx + c \qquad \acute{f}(x) = 0$

$3(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0 \Rightarrow 3 - 2b + c = 0 \Rightarrow -2b + c = -3 \ldots\ldots(2)$

$b - c = 2 \quad \ldots(1)$

$\underline{-2b + c = -3 \quad \ldots(2)}$ بالجمع

$-b = -1 \Rightarrow b = 1$ نعوض في (١)

$1 - c = 2 \Rightarrow c = -1$

$\acute{\acute{f}}(x) = 6x + 2b = 6x + 2 \Rightarrow 6x + 2 = 0 \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = (-\frac{1}{3})^3 + (-\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{38}{27}$ نقطة انقلاب $(-\frac{1}{3}, \frac{38}{27})$

	$x < -\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$x > -\frac{1}{3}$
اشارة $\acute{\acute{f}}(x)$	− − − − − − (تحدب ⋒)		+ + + + + + + (تقعر ⋓)

س : اذا كانت $f(x) = a\,x^2 - (x + b)^2$ والنقطة $(1, -2)$ حرجة جد قيمة a, b الموجبتين ثم بين نوع النقطة الحرجة . وزاري ٢٠٠٩ / د١

الحل : $\because (1, -2)$ تنتمي للدالة فهي تحقق معادلة الدالة

$-2 = a - (1 + b)^2$

$-2 = a - (1 + 2b + b^2) \Rightarrow -2 = a - 1 - 2b - b^2$

$\therefore -1 = a - 2b - b^2 \ldots\ldots\ldots(1)$

$\acute{f}(x) = 2ax - 2(x + b) \qquad \acute{f}(x) = 0$

$2a(1) - 2(1 + b) = 0 \Rightarrow [2a - 2 - 2b = 0] \div 2$

$a - 1 - b = 0 \Rightarrow a = 1 + b \dots\dots\dots (2)$

$\therefore -1 = 1 + b - 2b - b^2 \Rightarrow b^2 + b - 2 = 0 \Rightarrow (b+2)(b-1) = 0$

$either\ \ b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$ يهمل

$or\ \ b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \therefore a = 1 + 1 \Rightarrow a = 2$

$\acute{f}(x) = 4x - 2(x+1)$ $\therefore (1,-2)$ نهاية صغرى محلية

اشارة $\acute{f}(x)$	$x < 1$	1	$x > 1$
	$- - - - - -$ تناقص ↘		$+ + + + + + +$ تزايد ↗

ن ص

س : اذا كان المستقيم $y + 9x = 28$ مماسا للدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ عندالنقطة $(3,1)$ جد قيمة b, a . وزاري ٢٠٠٩ / د٢

الحل : $\because$ $(3,1)$ تنتمي للدالة فهي تحقق معادلة الدالة

$f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$

$1 = a(3)^3 + b(3)^2 + 1$

$1 = 27a + 9b + 1 \Rightarrow 0 = 27a + 9b] \div 9$

$3a + b = 0 \dots\dots\dots\dots (1)$

$\acute{f}(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow \acute{f}(3) = 3a(9) + 2b(3) \Rightarrow \acute{f}(3) = 27a + 6b$ ميل المماس

ميل المماس $= \dfrac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \dfrac{-9}{1} = -9$

$[27a + 6b = -9] \div 3$

$9a + 2b = -3 \dots\dots\dots (2)$

$3a + b = 0 \dots\dots\dots (1)] \times 2$

$\underline{9a + 2b = -3 \dots\dots\dots (2)}$

$6a + 2b = 0 \dots\dots\dots (1)] \times 2$

$\underline{\mp 9a \mp 2b = \pm 3 \dots\dots\dots (2)}$

$-3a = 3 \Rightarrow a = -1$ نعوض في المعادلة (١)

$\therefore 3(-1) + b = 0 \Rightarrow -3 + b = 0 \Rightarrow b = 3$

س : اذا علمت ان لمنحني الدالة $f(x) = ax + \frac{b}{x-1}$ نقطة نهاية صغرى محلية هي $(3,10)$ فجد قيمة $a, b \in R$.

الحل : النقطة $(3,10)$ تحقق معادلة المنحني والمشتقة عندها تساوي صفر

$$f(x) = ax + \frac{b}{x-1} \Rightarrow 10 = 3a + \frac{b}{3-1} \Rightarrow 10 = 3a + \frac{b}{2} \overset{(\times 2)}{\Longrightarrow} 20 = 6a + b \ldots .(1)$$

$$f(x) = ax + b\,(x-1)^{-1} \Rightarrow \acute{f}(x) = a - b(x-1)^{-2} \Rightarrow \acute{f}(x) = a - \frac{b}{(x-1)^2}$$

$$a - \frac{b}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{(3-1)^2} = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{4} = 0 \overset{(\times 4)}{\Longrightarrow} 4a - b = 0 \ldots .(2)$$

$6a + b = 20 \ldots .(1)$

$\underline{4a - b = 0 \quad \ldots .(2)}$

$10a = 20 \Rightarrow a = 2$

$4(2) - b = 0 \;\Rightarrow b = 8$

س : اذا كان المستقيم $x - y + 2 = 0$ يمس منحني القطع المكافئ $y^2 = hx$ جد بؤرة القطع المكافئ .

الحل :

$$m = \frac{- \text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$2y\,y' = h \;\Rightarrow y' = \dfrac{h}{2y}$ ميل المماس للمنحني

(اذا مس أو وازى مستقيم منحني تساوى ميلاهما)

$\frac{h}{2y} = 1 \Rightarrow h = 2y \;\Rightarrow y = \frac{h}{2} \;\ldots\ldots(1)$ تعوض في معادلة المستقيم

$x - \frac{h}{2} + 2 = 0 \;\Rightarrow x = \frac{h}{2} - 2 \;\ldots\ldots(2)$ نعوض المعادلتين (١) ، (٢) بمعادلة القطع المكافئ

$$(\frac{h}{2})^2 = h\left(\frac{h}{2} - 2\right) \Rightarrow \left[\frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{2} - 2h\right] \times 4$$

$$h^2 = 2h^2 - 8h \;\Rightarrow 2h^2 - h^2 - 8h = 0 \Rightarrow h^2 - 8h = 0 \Rightarrow h(h-8) = 0$$

$either \quad h = 0$ تهمل

$or \quad h - 8 = 0 \;\Rightarrow h = 8$

$y^2 = 8x$

$\underline{y^2 = 4px}$

$4p = 8 \;\Rightarrow p = 2$ بؤرة القطع المكافئ $(2\,,0)$

س واجب : اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x$ وكان $f'(3) = 0$ ، $f'(-1) = 5$ فجد قيمتي $a\,,b$.

س واجب : جد معادلة المنحني $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ حيث ان النقطة $(-1\,,4)$ نقطة انقلاب له وميل المماس عندها يساوي (-1) . ٢٠١٦ / د٢ خارج القطر



رسم المخطط البياني للدالة

لرسم المخطط البياني لأي دالة معطاة نتبع الخطوات التالية والتي تمثل النقط الاساسية للرسم :

١) اوسع مجال للدالة ٢) نقط التقاطع مع المحورين ٣) التناظر ٤) المحاذيات

٥) دراسة $\acute{f}(x)$ وما ينتج عنها ٦) دراسة $\acute{\acute{f}}(x)$ وما ينتج عنها ٧) تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها

١) أوسع مجال للدالة :

❖ كثيرات الحدود : اوسع مجال لها $= R$.

❖ الدوال الكسرية : القيم التي تجعل المقام $=$ صفر $/\ R$

❖ الدوال الجذرية : القيمة التي داخل الجذر ≥ 0

٢) نقط التقاطع مع المحورين : وهي على نوعين :

❖ التقاطع مع المحور الصادي : لإيجاد نقط التقاطع مع المحور (y) نجعل $(x = 0)$ لإيجاد قيم y .

❖ التقاطع مع المحور السيني : لإيجاد نقط التقاطع مع المحور (x) نجعل $(y = 0)$ لإيجاد قيم x .

مثال توضيحي : جد نقاط التقاطع

$a)\ f(x) = x^3 - 4x$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0$

$\therefore$ نقط التقاطع $(2\,,0), (-2\,,0), (0\,,0)$

٣) التناظر : وهو على نوعين

a) يكون المنحني متناظر مع المحور الصادي اذا كانت اسس المتغير (x) كلها زوجية اي ان $f(-x) = f\ (x)$

b) يكون المنحني متناظر حول نقطة الاصل اذا كانت اسس المتغير (x) كلها فردية اي ان $f(-x) = -f\ (x)$

مثال توضيحي :

$1)\ f(x) = x^4 - x^2 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 - \frac{1}{(-x)^2}$

$f(-x) = x^4 - x^2 - \frac{1}{x^2}$ $\boxed{f(x) = f(-x)}$

$2)\ f(x) = x^3 - 2x \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -[x^3 - 2x]$

$\boxed{f(-x) = -f(x)}$

٤) المحاذيات : دراستنا للمحاذيات تقتصر على الدوال الكسرية فقط

❖ المحاذي الافقي الموازي لمحور السينات : تكون معادلته $y =$ عدد هذا العدد هو حاصل قسمة معامل الحد الاكبر درجة من البسط على معامل الحد الاكبر درجة من المقام بشرط تساوي الدرجتين .

❖ المحاذي الشاقولي (العمودي) الموازي لمحور الصادات : نجعل الدالة بدلالة المتغير x اي نجعل $y = \frac{g(x)}{h\,(x)}$ ثم نجعل $h(x) = 0$ ونجد قيم (x) فهي تمثل معادلة المستقيم الشاقولي .

$$(1)\ f(x) = \frac{3x-4}{x+2}$$

المحاذي الشاقولي (العمودي) $x + 2 = 0 \implies x = -2$

المحاذي الافقي $y = \frac{3x-4}{x+2} \implies y = \frac{3}{1} \implies y = 3$

$$(2)\ f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$$

المحاذي الشاقولي (العمودي) : $x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$

المحاذي الافقي : $y = \frac{0x^2+x+3}{x^2-4}$ نساوي الدرجتين $\implies y = \frac{\text{معامل } x^2 \text{ للبسط}}{\text{معامل } x^2 \text{ للمقام}} = \frac{0}{1} \implies y = 0$

$$(3)\ f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x-5}$$

المحاذي الشاقولي (العمودي) : $x - 5 = 0 \implies x = 5$

المحاذي الافقي : $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x-5} = \frac{x^2+3x+3}{0x^2+x-5}$ نساوي الدرجتين $\implies y = \frac{\text{معامل } x^2 \text{ للبسط}}{\text{معامل } x^2 \text{ للمقام}} = \frac{1}{0} \implies y =$ غير معرف

مثال : أرسم بالاستعانة بمعلوماتك في التفاضل منحني الدالة $f\,(x) = (x^2-1)^2$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $R =$

2) نقاط التقاطع مع المحورين

١) المحور السيني : $f(x) = y = 0 \implies (x^2-1)^2 = 0 \implies x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$

$\therefore$ نقاط التقاطع $(1\,,0)\ ,\ (-1\,,0)$

٢) المحور الصادي : $x = 0$

$y = ((0)^2-1)^2 = (-1)^2 = 1$ $\therefore$ نقاط التقاطع $(0, 1)$

3) التناظر : الدالة متناظرة مع المحور الصادي لأنه $f\,(-x) = f\,(x)$

$$f(-x) = ((-x)^2-1)^2 = (x^2-1)^2$$

4) المحاذيات : لا يوجد محاذيات

5) مناطق التزايد والتناقص

$$\acute{y} = 2\,(x^2-1)\,.\,2x = 4x^3 - 4x$$

$$\acute{y} = 0 \implies [4x^3 - 4x = 0\,]\ \div 4$$

$$x^3 - x = 0 \implies x\,(x^2-1) = 0$$

$$either\ \ x = 0$$

$or \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ نقطة حرجة مرشحة

$x = \pm 1 \Rightarrow y = [(\pm 1)^2 - 1]^2 = 0$ نقطة نهاية صغرى محلية $(-1, 0)$, $(1, 0)$

$x = 0 \Rightarrow y = [(0)^2 - 1]^2 = 1$ نقطة نهاية عظمى محلية $(0, 1)$

مناطق التناقص $\{x : x < -1\}$, $(0, 1)$

مناطق التزايد $\{x : x > 1\}$, $(-1, 0)$

6) مناطق التحدب والتقعر

$y'' = 12x^2 - 4$

$12x^2 - 4 = 0 \,] \div 4$

$3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{array}{ccccc} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & & \frac{1}{\sqrt{3}} & \\ ++++ & | & ---- & | & ++++ \\ \cup & & \cap & & \cup \end{array}$$

$y = [(\pm \frac{1}{\sqrt{3}})^2 - 1]^2 \Rightarrow y = [\frac{1}{3} - 1]^2 = (\frac{-2}{3})^2 = \frac{4}{9}$

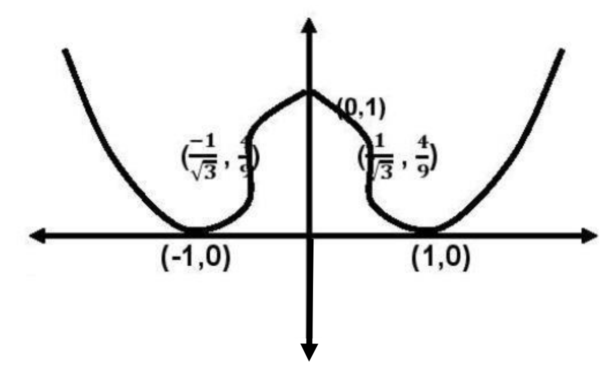
$\therefore \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right)$ نقاط الانقلاب

مناطق التقعر $\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $\left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

مناطق التحدب $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

7) الرسم البياني

x	y	(x, y)
1	0	$(1, 0)$
-1	0	$(-1, 0)$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{4}{9}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9})$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{4}{9}$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9})$



مثال : ارسم منحني الدالة باستخدام معلوماتك في التفاضل $f(x) = x^5$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة = R

2) نقاط التقاطع مع المحورين

- المحور السيني نجعل $y = 0$

$x^5 = 0 \Rightarrow x = 0$ النقطة $(0, 0)$

- المحور الصادي نجعل $x = 0$

$y = (0)^5 = 0$ النقطة $(0, 0)$

3) التناظر

الدالة متناظرة مع نقطة الاصل لأن

$$f\,(-x)\ =\ -f\ (x)$$

$$f\,(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$$

4) المحاذيات : لا يوجد محاذيات لأن الدالة ليست نسبية

5) مناطق التزايد والتناقص

$$\acute{y} = 5x^4 \Rightarrow 5x^4 = 0 \quad \Rightarrow x = 0$$

لا توجد نقاط نهايات والدالة متزايدة في $\{x : x > 0\}, \{x : x < 0\}$

$+ + + + + + \nearrow$ | 0 | $+ + + + + + \nearrow$

$(0\,,0)$ نقطة حرجة لا تمثل نقطة نهاية

6) مناطق التحدب والتقعر

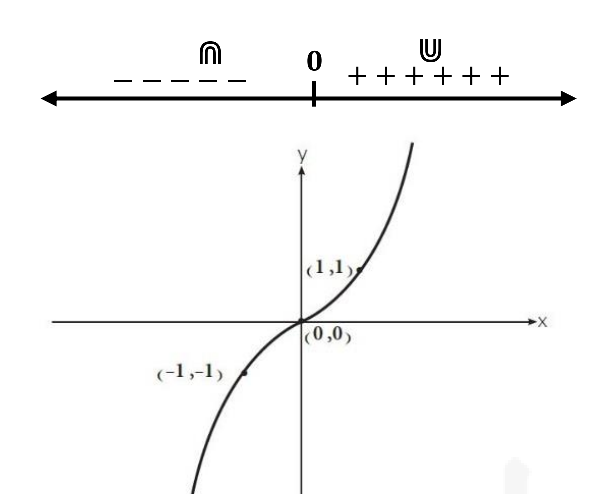
$$\acute{\acute{y}} = 20x^3 \Rightarrow 20x^3 = 0 \quad \Rightarrow x = 0$$

$$y\ =\ (0)^5 = 0\ \ ,\ \ x\ =\ 0$$

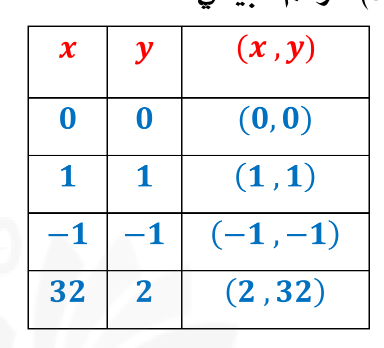
$\therefore$ $(0\,,0)$ نقطة انقلاب

الدالة محدبة في $\{x : x < 0\}$

الدالة مقعرة في $\{x : x > 0\}$



7) الرسم البياني



x	y	$(x\,,y)$
0	0	$(0,0)$
1	1	$(1\,,1)$
-1	-1	$(-1\,,-1)$
32	2	$(2\,,32)$

مثال : بالاستعانة بالتفاضل أرسم منحني الدالة $f\,(x)\ =\dfrac{3x-1}{x+1}$

الحل :

1) اوسع مجال للدالة $= R / \{-1\}$, $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

2) نقاط التقاطع مع المحورين

١- محور السينات $y = 0$: $0 = \dfrac{3x-1}{x+1} \Rightarrow 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\,,0\right)$

٢- محور الصادات $x = 0$: $f(0) = \dfrac{3(0)-1}{0+1} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0\,,-1)$

3) التناظر : ∵ العدد (1) ينتمي الى مجال الدالة (-1) لا ينتمي الى مجال الدالة لذلك فالمنحني غير متناظر مع محور الصادات وغير متناظر مع نقطة الاصل .

4) المحاذيات : المحاذي الشاقولي (العمودي) $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

المحاذي الافقي $y = \frac{3}{1} \Rightarrow y = 3$

$$5)\ \acute{f}(x) = \frac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2} \quad , \quad f'(x) = 0$$

$4 = 0$ غير ممكن $\forall\, x \in R\ /\{-1\}\ ,\ \acute{f}(x) > 0$

الدالة متزايدة $\{x : x > -1\}$ ، $\{x : x < -1\}$ ولا توجد نقاط حرجة .

$$6)\ \acute{f}(x) = 4\,(x+1)^{-2}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = -8\,(x+1)^{-3} = \frac{-8}{(x+1)^3} \quad , \quad \acute{\acute{f}}(x) = 0$$

$-8 = 0$ غير ممكن

$+ + + + + +$ ↗ -1 ↗ $+ + + + + +$

$+ + + + + +$ -1 $- - - - - -$

تقعر ⋓   تحدب ⋒

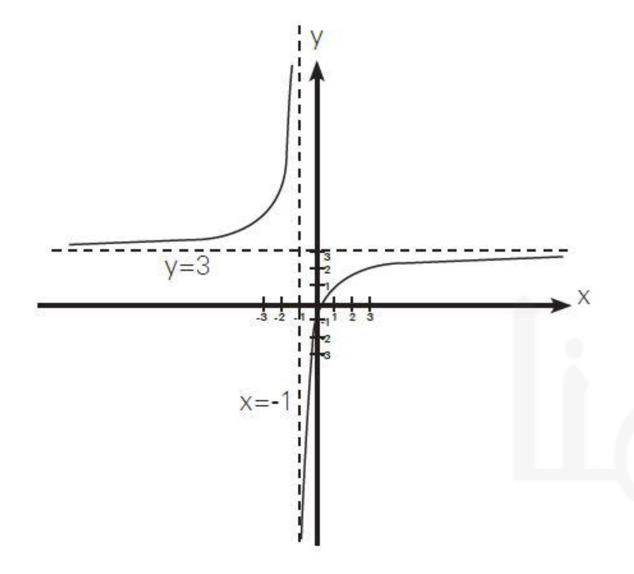
الدالة مقعرة $\{x : x < -1\}$

الدالة محدبة $\{x : x > -1\}$

∴ الدالة لا تمتلك نقطة أنقلاب لأن (-1) لا ينتمي الى مجال الدالة .

7) الرسم البياني

x	y	$(x\,,y)$
0	-1	$(0,-1)$
$\frac{1}{3}$	0	$\left(\frac{1}{3}\,,0\right)$
2	$\frac{5}{3}$	$\left(2\,,\frac{5}{3}\right)$
-2	7	$(-2\,,7)$
1	1	$(1\,,1)$



مثال : باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

الحل :

1) اوسع مجال للدالة $= R$

2) نقاط التقاطع مع محور السينات $y = 0 \Rightarrow x = 0$ ، $(0\,,0)$ مع محور السينات

نقاط التقاطع مع محور الصادات $x = 0 \Rightarrow y = 0$ ، $(0\,,0)$ مع محور الصادات

3) التناظر مع الصادي : $\forall\, x \in R\,, \exists -x \in R$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$$

$f(-x) = f(x)$ متناظرة مع المحور الصادي لأنها زوجية

4) المحاذيات : المحاذي الافقي $= \frac{\text{معامل } x^2 \text{ للبسط}}{\text{معامل } x^2 \text{ للمقام}}$ $\quad y = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow y = 1$

لا يوجد محاذي عمودي $x^2 + 1 \neq 0$

5) مناطق التزايد والتناقص

$$\acute{f}(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$0 = \frac{(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$- - - - - - \;(\searrow)\quad 0 \quad + + + + + \;(\nearrow)$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$ $\quad (0\,,0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

تزايد $\{\forall\, x : x > 0\}$ $\quad$ تناقص $\{\forall\, x : x < 0\}$

$$6)\ \acute{\acute{f}}(x) = \frac{(x^2+1)^2(2) - 2x\,(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{(x^2+1)[2(x^2+1) - 8x^2]}{(x^2+1)^4}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{2x^2 + 2 - 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{2 - 6x^2}{(x^2+1)^3}$$

$0 = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$ بضرب الطرفين في الوسطين

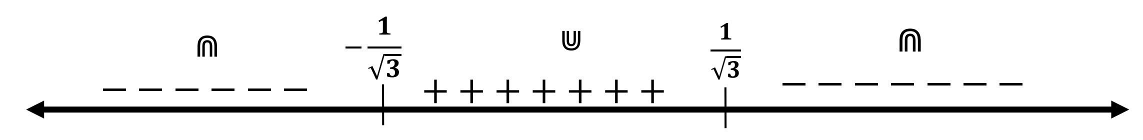
$$2 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{6}$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

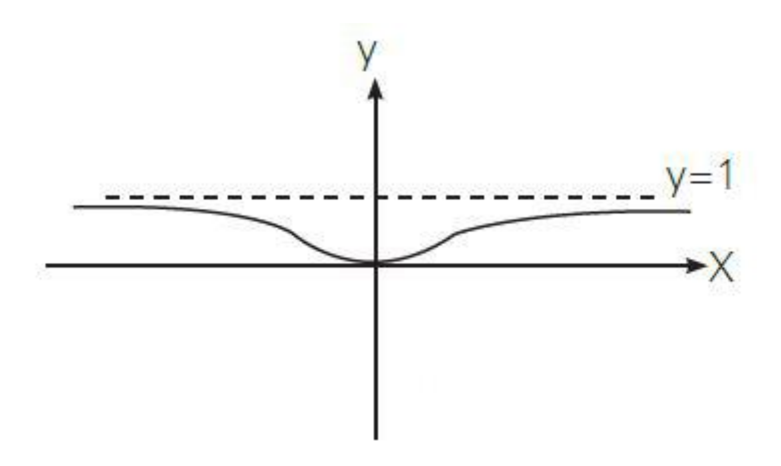
محدبة في $\left\{x: x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{x: x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ ، مقعرة في الفترة المفتوحة $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

نقطتا الانقلاب $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$ ، $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$



7) الرسم البياني

x	y	(x, y)
0	0	$(0, 0)$
-1	$\frac{1}{2}$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
2	$\frac{4}{5}$	$\left(2, \frac{4}{5}\right)$
-2	$\frac{4}{5}$	$\left(-2, \frac{4}{5}\right)$
1	$\frac{1}{2}$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$



مثال : ارسم بالاستعانة بمعلوماتك في التفاضل الدالة : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $= R$

2) نقاط التقاطع مع المحورين

$x = 0 \Rightarrow y = 4$

$y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ لا يمكن حل المعادلة

∴ النقطة $(0, 4)$ نقطة التقاطع مع المحور الصادي

3) التناظر :

$$\forall\, x \in R\ \exists\, (-x) \in R \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4 \neq f(x)$$

∴ لا يوجد تناظر مع محور الصادات أو نقطة الاصل لأن :

$$f(-x) \neq -f(x) \quad , \quad f(-x) \neq f(x)$$

4) المحاذيات : لا توجد محاذيات لأن الدالة ليست نسبية

5) مناطق التزايد والتناقص

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 6x$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad , \quad x = 2$

$f(0) = 4 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0\,,4)$

$f(2) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (2\,,0)$

$$\underset{+++++++}{\nearrow} \quad 0 \quad \underset{-------}{\searrow} \quad 2 \quad \underset{+++++++}{\nearrow}$$

f متزايدة في كل من $\{x: x < 0\}\,, \{x: x > 2\}$

f متناقصة في الفترة $(0\,,2)$

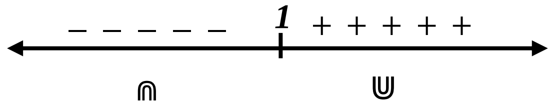
∴ $(0\,,4)$ نقطة نهاية عظمى محلية ، $(2\,,0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

6) مناطق التقعر والتحدب

$\acute{\acute{f}}(x) = 6x - 6$ (نجعل $\acute{\acute{f}}(x) = 0$)

$6x - 6 = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$

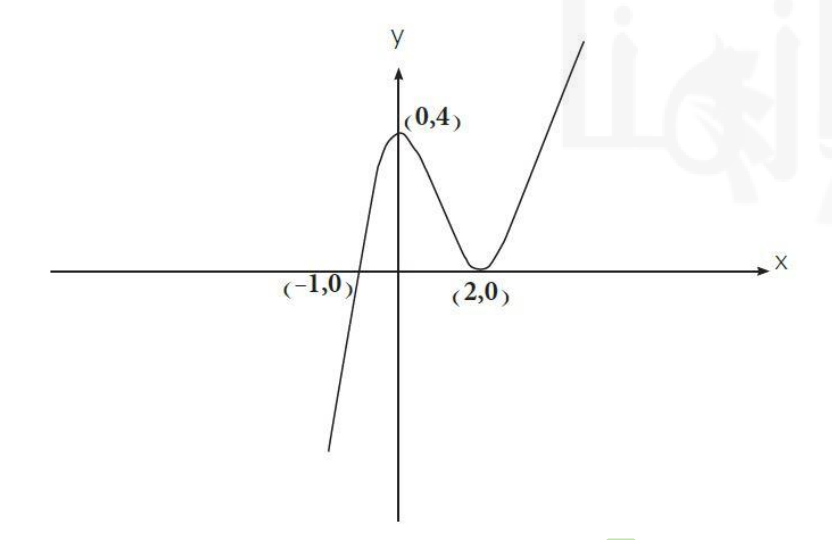
$f(1) = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (1\,,2)$



f مقعرة في $\{x: x > 1\}$

f محدبة في $\{x: x < 1\}$ ، $(1\,,2)$ نقطة انقلاب

7) الرسم البياني



x	y	$(x\,,y)$
0	4	$(0\,,4)$
1	2	$(1\,,2)$
2	0	$(2\,,0)$
3	4	$(3\,,4)$
−1	0	$(-1\,,0)$

حل تمارين (5 – 3)

أرسم باستخدام معلوماتك في التفاضل الدوال التالية :

1) $f(x) = 10 - 3x - x^2$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $= R$

2) التقاطع مع المحورين

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 10 - 0 - 0 = 10$ فان $(0, 10)$

$y = 0 \Rightarrow 10 - 3x - x^2 = 0$

$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -5 \quad , \quad x = 2$

$\therefore$ نقط التقاطع $(0, 10), (-5, 0), (2, 0)$

3) التناظر : لا يوجد تناظر مع محور الصادات أو نقطة الاصل .

$f(-x) = 10 + 3x - x^2$

$f(x) = 10 - 3x - x^2$

$f(-x) \neq f(x) \quad , \quad f(-x) \neq -f(x)$

4) المحاذيات : لا توجد مستقيمات محاذية لأن الدالة غير نسبية .

5) مناطق التزايد والتناقص

$\acute{f}(x) = -3 - 2x$

$-3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$

$+ + + + + \nearrow \quad -\frac{3}{2} \quad - - - - - \searrow$

$f\left(\frac{-3}{2}\right) = 10 - 3\left(\frac{-3}{2}\right) - \frac{9}{4} \Rightarrow 10 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{40 + 18 - 9}{4} = \frac{49}{4}$

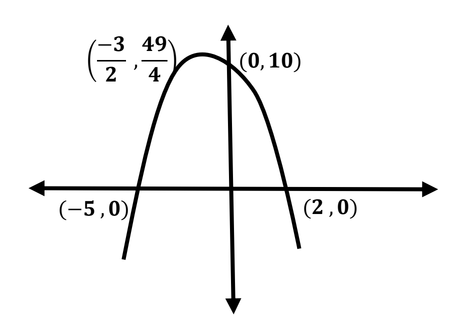
النقطة $\left(\frac{-3}{2}, \frac{49}{4}\right)$ نقطة نهاية عظمى محلية

متزايدة $\left\{\forall x : x < -\frac{3}{2}\right\}$ ، متناقصة $\left\{\forall x : x > -\frac{3}{2}\right\}$

6) $\acute{\acute{f}}(x) = -2 \quad \therefore$ الدالة محدبة دائما مهما تكن قيمة x ولا توجد نقطة أنقلاب .

7) الرسم البياني

x	2	-5	$\frac{-3}{2}$	0
y	0	0	$\frac{49}{4}$	10
(x, y)	$(2, 0)$	$(-5, 0)$	$\left(\frac{-3}{2}, \frac{49}{4}\right)$	$(0, 10)$



2) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $= R$

2) التقاطع مع المحورين : $(0,3) \Leftarrow 3 = 3 + 0 - 0 = f(0) \Leftarrow x = 0$ عندما

$y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow (x+3)(x+1) = 0$ عندما

$x = -3 \quad , \quad x = -1$

فإن $(-3,0) , (-1,0)$

3) التناظر : $f(-x) = x^2 - 4x + 3$ $\qquad f(-x) \neq -f(x) \quad , \quad f(-x) \neq f(x)$

∴ لا يوجد تناظر مع محور الصادات أو نقطة الاصل

4) المحاذيات : لا توجد مستقيمات محاذية لأن الدالة ليست نسبية

5) مناطق التزايد والتناقص

$f'(x) = 2x + 4$

$2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$

$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 3 \Rightarrow 4 - 8 + 3 = -1$

-2 : $- - - - -$ ↘ | ↗ $+ + + + +$

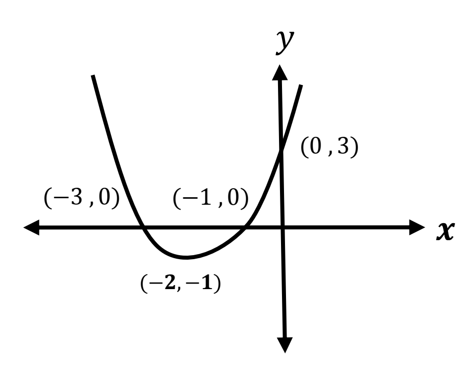
$(-2,-1)$ نقطة نهاية صغرى محلية

متزايدة $\{\forall x : x > -2\}$ ، متناقصة $\{\forall x : x < -2\}$

6) مناطق التقعر والتحدب

$f''(x) = 2$ الدالة مقعرة ولا توجد نقطة أنقلاب

7) الرسم البياني



x	-3	-2	-1	0	1
y	0	-1	0	3	8
(x,y)	$(-3,0)$	$(-2,-1)$	$(-,0)$	$(0,3)$	$(1,8)$

3) $f(x) = (1-x)^3 + 1$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $= R$

2) التقاطع مع المحورين

عندما $x = 0 \Rightarrow f(0) = (1-0)^3 + 1 = 2 \quad \therefore (0,2)$

عندما $y = 0 \Rightarrow (1-x)^3 + 1 = 0 \Rightarrow (1-x)^3 = -1 \Rightarrow 1 - x = -1 \Rightarrow x = 2 \quad \therefore (2,0)$

3) التناظر $f(-x) = (1-(-x))^3 + 1 = (1+x)^3 + 1$

لا يوجد تناظر مع محور الصادات أو نقطة الاصل $f(-x) \neq f(x) \quad , \quad f(-x) \neq -f(x)$

4) المحاذيات : لا توجد مستقيمات محاذية لأن الدالة ليست نسبية

5) مناطق التزايد والتناقص

$\acute{f}(x) = 3(1-x)^2 . (-1) = -3(1-x)^2 \quad$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$-3(1-x)^2 = 0 \xrightarrow{\div -3} (1-x)^2 = 0 \xrightarrow{\text{نجذر الطرفين}} 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(x) = (1-x)^3 + 1 \Rightarrow f(1) = (1-1)^3 + 1 \Rightarrow y = 0 + 1 = 1$ $\therefore (1,1)$ نقطة حرجة

$- - - - - \searrow \quad 1 \quad - - - - - \searrow$

$f(x)$ متناقصة $\{\forall x : x > 1\} \quad \{\forall x : x < 1\}$

6) $\acute{\acute{f}}(x) = -6(1-x) . (-1) \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = 6(1-x) \quad$ (نجعل $\acute{\acute{f}}(x) = 0$)

$6(1-x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = (1-1)^3 + 1 = 1$

نقطة انقلاب مرشحة $(1,1)$

$+ + + + + \quad 1 \quad - - - - - -$

$\cup \qquad \cap$

مقعرة $\{\forall x : x < 1\}$ ، محدبة $\{\forall x : x > 1\}$

7) الرسم البياني

x	2	0	1	-1
y	0	2	1	9
(x,y)	$(2,0)$	$(0,2)$	$(1,1)$	$(-1,9)$

y, x, $(-1,9)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(2,0)$

4) $f(x) = 6x - x^3$ وزاري ٢٠١٥ / د١

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $= R$

2) التقاطع مع المحورين

عندما $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 - 0 = 0 \quad (0, 0)$

عندما $y = 0 \Rightarrow 6x - x^3 = 0 \Rightarrow x(6 - x^2) = 0$

أما $x = 0$

أو $6 - x^2 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

نقط التقاطع $(0, 0) \quad , (\sqrt{6}, 0) \quad , (-\sqrt{6}, 0)$

3) التناظر : لا يوجد تناظر مع محور الصادات أو نقطة الاصل .

$$f(-x) = 6(-x) - (-x)^3 \Rightarrow f(-x) = -6x + x^3 \Rightarrow f(-x) = -(6x - x^3)$$

$$f(-x) = -f(x) \quad , \quad f(-x) \neq f(x)$$

∴ الدالة متناظرة حول نقطة الاصل ولا يوجد تناظر حول محور الصادات

4) المحاذيات : لا توجد مستقيمات محاذية لأن الدالة ليست نسبية

5) مناطق التزايد والتناقص

$\acute{f}(x) = 6 - 3x^2 \qquad$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$6 - 3x^2 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -6 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$$\begin{array}{ccccc} - - - - - \searrow & -\sqrt{2} & + + + + + \nearrow & \sqrt{2} & - - - - - \searrow \end{array}$$

$f(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3 \Rightarrow y = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \qquad$ نقطة نهاية عظمى $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

$f(-\sqrt{2}) = 6(-\sqrt{2}) - (-\sqrt{2})^3 \Rightarrow -6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = -4\sqrt{2} \qquad$ نقطة نهاية صغرى $(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$

$f(x)$ متزايدة في $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\qquad f(x)$ متناقصة في $\{x: x < -\sqrt{2}\}$, $\{x: x > \sqrt{2}\}$

6) $\acute{\acute{f}}(x) = -6x \qquad$ نجعل $\acute{\acute{f}}(x) = 0$

$-6x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow \boxed{y = 0} \qquad$ ∴ $(0, 0)$ نقطة انقلاب

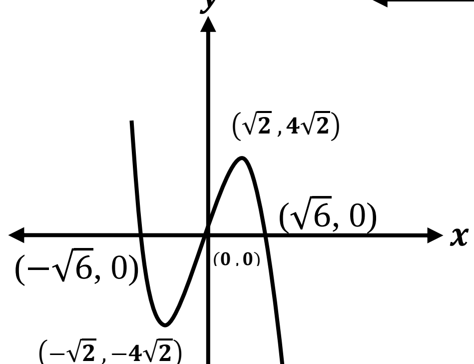
$$\begin{array}{ccc} + + + + + & 0 & - - - - - \\ \cup & & \cap \end{array}$$

$f(x)$ مقعرة في $\{x: x < 0\}$

$f(x)$ محدبة في $\{x: x > 0\}$

7) الرسم البياني

x	0	$-\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
y	0	0	0	$-4\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$
(x, y)	$(0, 0)$	$(-\sqrt{6}, 0)$	$(\sqrt{6}, 0)$	$(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$



ملاحظة : التحدب بقدر التقعر في الرسم لأن التناظر حول نقطة الاصل .

5) $f(x) = \frac{1}{x}$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة = $R/\{0\}$

2) التقاطع مع المحورين

$0 \neq x$ لأن $\frac{1}{0}$ غير معرفة لا توجد نقاط تقاطع مع محور الصادات

$0 \neq y$ لأن $1 \neq 0$ لا توجد نقاط تقاطع مع محور السينات

3) التناظر $f(-x) = -\left(\frac{1}{x}\right)$ ، $f(-x) = -f(x)$ التناظر مع نقطة الاصل .

4) المحاذيات : المستقيم المحاذي الشاقولي $x = 0$

المستقيم المحاذي الافقي $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{0}{1} \Rightarrow y = 0$

5) مناطق التزايد والتناقص

$f(x) = x^{-1} \Rightarrow \acute{f}(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$0 = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow -1 = 0$ غير ممكن

$$\xleftarrow{\quad - - - - - \searrow \quad 0 \quad - - - - - \searrow \quad}$$

توجد فجوة ولا توجد نقاط حرجة

الدالة متناقصة بالفترتين $\{x : x \in R, x < 0\}$, $\{x : x \in R, x > 0\}$

6) $\acute{\acute{f}}(x) = 2x^{-3}$ (نجعل $\acute{\acute{f}}(x) = 0$)

$0 = \frac{2}{x^3} \Rightarrow 0 = 2$ غير ممكن

$$\xleftarrow{\quad - - - - - - \ (\cap) \quad 0 \quad + + + + + \ (\cup) \quad}$$

لا توجد نقاط انقلاب

محدبة $\{\forall x : x < 0\}$, مقعرة $\{\forall x : x > 0\}$

7) الرسم البياني

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	فجوة	1	$\frac{1}{2}$
(x, y)	$(-2, -\frac{1}{2})$	$(-1, -1)$	(x, y)	$(1, 1)$	$(2, \frac{1}{2})$

$x = 0$ ، $y = 0$ ، $(1, 1)$ ، $(2, \frac{1}{2})$ ، $(-2, -\frac{1}{2})$ ، $(-1, -1)$

6) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $= R / \{-1\}$

2) التقاطع مع المحورين

عندما $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0-1}{0+1} \Rightarrow y = -1 ,\ (0,-1)$

عندما $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 ,\ (1,0)$

3) التناظر : لا يوجد تناظر مع محور الصادات أو نقطة الاصل لأن :

$$f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1}$$

$$f(-x) \neq -f(x) , \qquad f(-x) \neq f(x)$$

4) المحاذيات :

المحاذي الشاقولي $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

المحاذي الافقي $y = \frac{1}{1} \Rightarrow y = 1$

5) مناطق التزايد والتناقص

$$\acute{f}(x) = \frac{(x+1).(1) - (x-1).(1)}{(x+1)^2}$$

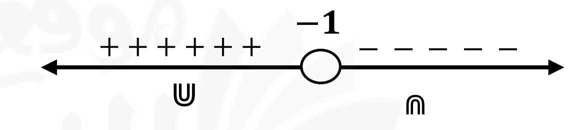
$$0 = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} \Rightarrow 0 \neq \frac{2}{(x+1)^2}$$ لا توجد نقاط حرجة

تزايد $\{\forall x : -1 < x < -1\}$

$$\begin{array}{ccc} \nearrow & -1 & \nearrow \\ +++++++ & \circ & +++++++ \end{array}$$

6) $\acute{f}(x) = 2(x+1)^{-2} \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = -4(x+1)^{-3}$

$0 \neq \frac{-4}{(x+1)^3}$ غير ممكن

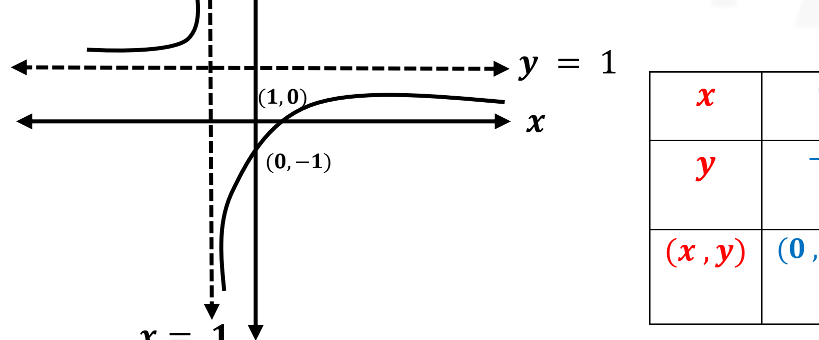


f محدبة في $\{x : x > -1\}$

f مقعرة في $\{x : x < -1\}$

7) الرسم البياني

x	0	1	2	−2
y	−1	0	$\frac{1}{3}$	3
(x,y)	$(0,-1)$	$(1,0)$	$(2,\frac{1}{3})$	$(-2,3)$



7) $f(x) = (x+2)(x-1)^2$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $= R$

2) التقاطع مع المحورين

عندما $x = 0 \Rightarrow f(0) = (0+2)(0-1)^2 = 2(1) \Rightarrow y = 2 \quad (0,2)$

عندما $y = 0 \Rightarrow 0 = (x+2)(x-1)^2$

$either\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$or \quad (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \qquad (1,0)\ ,(-2,0)$

3) التناظر : $f(-x) = (-x+2)(-x-1)^2$ لا يوجد تناظر مع محور الصادات أو نقطة الاصل

4) المحاذيات : لا توجد مستقيمات محاذية لأن الدالة ليست نسبية

5) مناطق التزايد والتناقص

$\acute{f}(x) = (x+2).2(x-1) + (x-1)^2.1 \qquad (\acute{f}(x) = 0$ نجعل$)$

$(x+2)(2x-2) + (x^2-2x+1) = 0$

$2x^2 - 2x + 4x - 4 + x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 4 + x^2 - 2x + 1 = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

$3(x^2-1) = 0 \overset{\div 3}{\Rightarrow} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$+ + + + + \ (\nearrow) \quad -1 \quad - - - - - \ (\searrow) \quad 1 \quad + + + + + + \ (\nearrow)$

$(1,0)$ نقطة حرجة وتمثل نهاية صغرى ، $(-1,4)$ نقطة حرجة وتمثل نهاية عظمى

$f(1) = (1+2)(1-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 0$

$f(-1) = (-1+2)(-1-1)^2 = 4 \Rightarrow y = 4$

$f(x)$ متزايدة $\{x: x > 1\}, \{x: x < -1\}$

$f(x)$ متناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

6) $\acute{f}(x) = 3(x^2-1)$

$\acute{\acute{f}}(x) = 3(2x) \qquad (\acute{\acute{f}}(x) = 0$ نجعل$)$

$6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = (0+2)(0-1)^2 \quad \therefore \quad y = 2$ $(0,2)$ نقطة أنقلاب

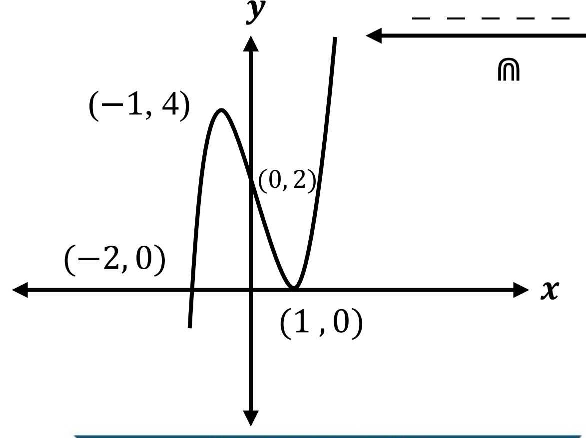
$- - - - - - - \ (\cap) \quad 0 \quad + + + + + + \ (\cup)$

$f(x)$ محدبة في $\{x: x < 0\}$

$f(x)$ مقعرة في $\{x: x > 0\}$

7) الرسم البياني

x	0	1	-2	-1
y	2	0	0	4
(x,y)	$(0,2)$	$(1,0)$	$(-2,0)$	$(-1,4)$



8) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

الحل :

1) أوسع مجال للدالة $= R$ لأن $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \notin R$

2) التقاطع مع المحورين : $0 = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$x^2 - 1 = 0 \quad , \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \ , \ (-1,0),(1,0)$

$x = 0 \Rightarrow y = -1 \ , \ (0,-1)$

3) التناظر : $f(-x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(x)$ التناظر حول محور الصادات لأن $f(-x) = f(x)$

4) المحاذيات :

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ لا يوجد مستقيم محاذي شاقولي

$y = \frac{1}{1} = 1$ المحاذي الافقي

5) مناطق التزايد والتناقص

$$\acute{f}(x) = \frac{(x^2+1).2x - (x^2-1).2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \quad , \quad (\acute{f}(x) = 0 \text{ نجعل})$$

$\frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1 \quad (0,-1)$ نقطة نهاية صغرى

$f(x)$ متزايدة في $\{x : x > 0\}$ ، $f(x)$ متناقصة في $\{x : x < 0\}$

$- - - - - - -$ ↘ 0 ↗ $+ + + + + +$

$$6)\ \acute{\acute{f}}(x) = \frac{(x^2+1)^2.4 - 4x.2(x^2+1).2x}{(x^2+1)^4}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{4(x^2+1)^2 - 16x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{(x^2+1)[4(x^2+1) - 16x^2]}{(x^2+1)^4}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{4x^2 + 4 - 16x^2}{(x^2+1)^3} \quad (\acute{\acute{f}}(x) = 0 \text{ نجعل})$$

$$\frac{4 - 12x^2}{(x^2+1)^3} = 0$$

$$4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = +\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2}\right)$$

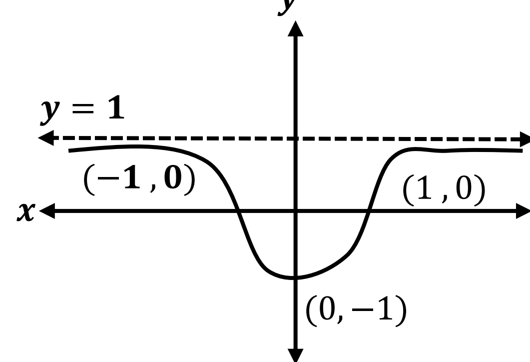
$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2}\right)$ نقطة الانقلاب المرشحة

$f(x)$ محدبة في $\{x: x > \frac{1}{\sqrt{3}}\}, \{x: x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

$f(x)$ مقعرة في $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$\begin{array}{ccccc} - - - - & \frac{-1}{\sqrt{3}} & + + + + & \frac{1}{\sqrt{3}} & - - - - - \\ \cap & & \cup & & \cap \end{array}$$

7) الرسم البياني



x	-1	1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$
y	0	0	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
(x, y)	$(-1, 0)$	$(1, 0)$	$(0, -1)$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2})$	$(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2})$

---

9) $f(x) = 2x^2 - x^4$

الحل :

1) اوسع مجال للدالة $= R$

2) التقاطع مع المحورين

عندما $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 - 0 = 0 \quad , \quad (0, 0)$

عندما $y = 0 \Rightarrow 2x^2 - x^4 = 0$

$2x^2 = x^4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad , \quad (\mp\sqrt{2}, 0)$

3) التناظر $f(-x) = 2x^2 - x^4 = f(x)$ التناظر مع محور الصادات لأن : $f(-x) = f(x)$

4) المحاذيات : لا يوجد محاذيات لأن الدالة ليست نسبية

5) مناطق التزايد والتناقص

$f'(x) = 4x - 4x^3 \qquad (f'(x) = 0$ نجعل$)$

$4x - 4x^3 = 0 \overset{\div 4}{\Rightarrow} x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0$

$either \quad x = 0$

$or \quad (1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$f(1) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow y = 1$

$f(-1) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow y = 1$

$f(0) = 0 - 0 = 1 \Rightarrow y = 0$

$(1, 1)$نقطة نهاية عظمى محلية ، $(-1, 1)$ نقطة نهاية عظمى محلية ، $(0, 0)$ نقطة نهاية صغرى

$f(x)$ متزايدة في $\{x : x < -1\}$, والفترة $(0 , 1)$

$f(x)$ متناقصة في $\{x : x > 1\}$, والفترة $(-1 , 0)$

$$+ + + + \; -1 \; - - - - \; 0 \; + + + + \; 1 \; - - - -$$

6) $\acute{\acute{f}}(x) = 4 - 12x^2$ $\quad$ ($\acute{\acute{f}}(x) = 0$ نجعل)

$4 - 12x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -12x^2 = -4$

$$x^2 = \frac{4}{12} \quad \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$- - - - \; \frac{-1}{\sqrt{3}} \; + + + + \; \frac{1}{\sqrt{3}} \; - - - -$$

$$\cap \qquad \cup \qquad \cap$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \quad , \left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{5}{9}\right)$$

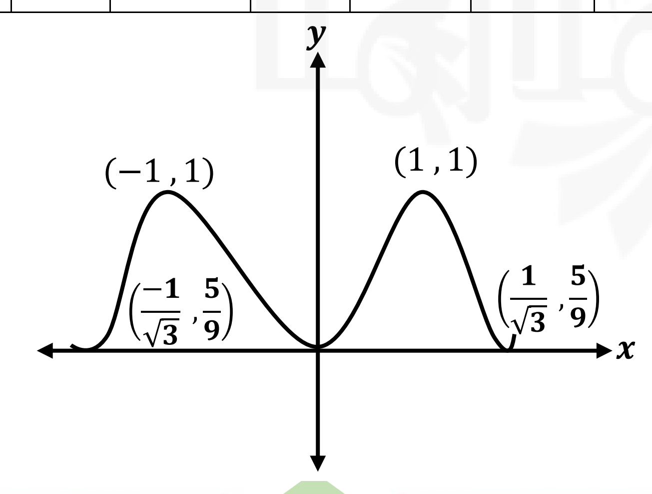
$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \quad , \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} , \frac{5}{9}\right)$$

النقط $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{5}{9}\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} , \frac{5}{9}\right)$ نقط انقلاب مرشحة

$f(x)$ مقعرة في $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ، $f(x)$ محدبة في $\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $\left\{x : x < \frac{-1}{\sqrt{3}}\right\}$

7) الرسم البياني

x	0	$\pm\sqrt{2}$	1	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$
y	0	0	1	1	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$
(x , y)	$(0, 0)$	$(\pm\sqrt{2}, 0)$	$(1, 1)$	$(-1, 1)$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$	$(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$



$f\ (x) = \frac{6}{x^2+3}$ (10

الحل :

1) اوسع مجال للدالة $R =$ لأن $x^2+3=0 \Rightarrow x^2=-3 \notin R$

2) نقاط التقاطع مع المحورين

$x=0 \Rightarrow f\ (0) = \frac{6}{0+3} = 2 \quad , \quad (0\ ,2)$

$\frac{6}{x^2+3} = 0 \Rightarrow 0 \neq 6$

3) التناظر : $f\ (-x) = \frac{6}{x^2+3} = f\ (x)$ التناظر مع محور الصادات لأن $f\ (-x) = f(x)$

4) المحاذيات :

$x^2+3 \neq 0$ لا يوجد محاذي شاقولي

$y = \frac{0}{1} \Rightarrow y=0$ المحاذي الافقي

5) مناطق التزايد والتناقص

$f'(x) = \frac{(x^2+3)\ 0-(6)(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$ (نجعل $f'(x)=0$)

$\frac{-12x}{(x^2+3)\ ^2} = 0 \Rightarrow -12\ x = 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=2 \Rightarrow y=2$

النقطة $(0\ ,2)$ نقطة نهاية عظمى محلية

اشارة $f'(x)$: $+ + + +$ ↗ (قبل 0) ، $- - - -$ ↘ (بعد 0)

الدالة متزايدة بالفترة $\{x : x \in R\ , x < 0\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x : x \in R\ , x > 0\}$

6) $f''(x) = \frac{(x^2+3)^2(-12)-[-(12x)2(x^2+3)(2x)]}{(x^2+3)^4}$

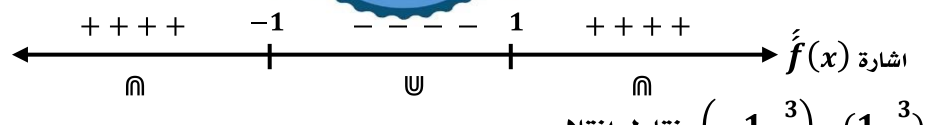
$f''(x) = \frac{-12(x^2+3)^2+48x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4} = \frac{(x^2+3)[-12(x^2+3)+48x^2]}{(x^2+3)^4}$

$f''(x) = \frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3} = 0$ (نجعل $f''(x)=0$)

$36x^2-36=0 \overset{\div 36}{\Longrightarrow} x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$x=1 \Rightarrow f(1) = y = \frac{6}{(1)^2+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$x=-1 \Rightarrow f(-1) = y = \frac{6}{(-1)^2+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$



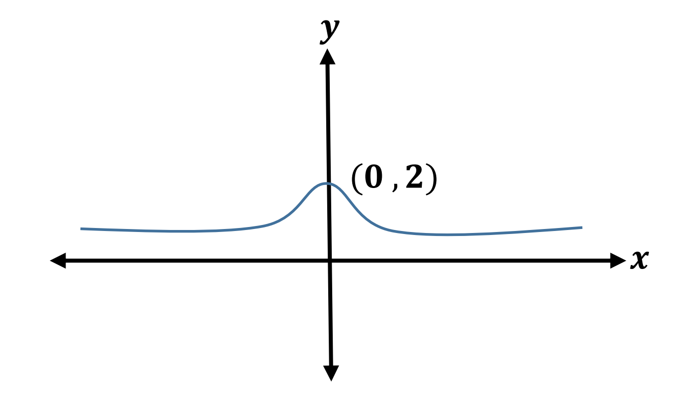
$\therefore$ النقاط $\left(1\,,\frac{3}{2}\right)\,,\left(-1\,,\frac{3}{2}\right)$ نقاط انقلاب

$f(x)$ مقعرة في $\{x: x > 1\}\,,\{x: x < -1\}$

$f(x)$ محدبة في الفترة $(-1\,,1)$

7) الرسم البياني

x	-1	1	0
y	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$(x\,,y)$	$\left(-1\,,\frac{3}{2}\right)$	$\left(1\,,\frac{3}{2}\right)$	$(0\,,2)$



تطبيقات عملية على القيم العظمى والصغرى

ظهرت في الفيزياء الكثير من المسائل التي أدت الى تطور حساب التفاضل والتكامل ومن هذه المسائل مسائل حساب أقصى أرتفاع تصله قذيفة أطلقت بزوايا مختلفة أو اقصى ارتفاع يصله جسم مقذوف شاقوليا الى الاعلى أو أقل كلفة أو أقل زمن ومسائل من الصناعات مثل أقل مساحة وأكبر حجم وأقل محيط ، ... الخ .

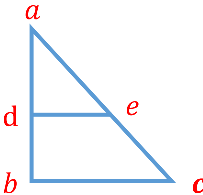
لحل المسائل المتعلقة بهذا الموضوع نتبع ما ياتي :

١- نرسم شكلا توضيحيا للسؤال اذا كان السؤال يحوي شكلا هندسيا .

٢- نعمل فرضية السؤال التي تعتمد على كلمة (جد ، ما هي ، عين ، احسب ، ...) اي تكون الفرضية على اساس المطلوب

٣- تكون علاقة رئيسية للدالة (اكبر ما يمكن ، ابعد ما يمكن ، اصغر ما يمكن ، أطول مسافة ، أقل كمية ، ...) ثم نبدأ بتكوين الدالة على اساس هذه الكلمات وفي أكثر الاحيان تكون هذه الدالة (قانون حجم ، مساحة ، محيط ، فيثاغورس ، تشابه مثلثات ، دوال دائرية ، ...) أما العلاقة الثانية فهي تكون علاقة مساعدة نأخذها من السؤال او الرسم .

٤- نشتق الدالة المشتقة الاولى ونساوي المشتقة الاولى الى الصفر ونجد القيم ونميزها على خط الاعداد . بعض القيم تهمل اذا لم تنطبق مع السؤال او المطلوب من خلال الاشارة مثلا ، وفي بعض الاسئلة مثلا يعطى المثلث فاذا كان المثلث خالي من مستقيم يوازي احد الاضلاع نستخدم نظرية فيثاغورس . اما اذا كان المثلث يحوي مستقيم يوازي احد الإضلاع نستخدم التناسب $\frac{ae}{ac} = \frac{ad}{ab}$



مثال : جد عددين مجموعهما 8 وحاصل ضربهما اكبر ما يمكن .

الحل :

الفرضية : نفرض العدد الاول $x =$

نفرض العدد الثاني $y =$

الدالــــة : حاصل ضربهما $m =$

$$x + y = 8$$

$$y = 8 - x \quad \ldots\ldots(1)$$

$$m = xy$$

$$m = x(8 - x)$$

$$m = 8x - x^2$$ نشتق

$$m' = 8 - 2x \qquad (m' = 0)$$

$$8 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$ نعوض في (١)

العدد الأول $x = 4$

العدد الثاني $y = 8 - 4 = 4$

مثال : جد العدد الذي اذا اضيف الى مربعه يكون الناتج أصغر ما يمكن .

الحل :

الفرضية : نفرض العدد $x =$

نفرض مربعه $x^2 =$

الدالــــة : $f(x) = x + x^2$

$$f'(x) = 1 + 2x \qquad (f'(x) = 0)$$

$$1 + 2x = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{-1}{2}$$

اشارة $f'(x)$: $- - - - - -$ | $+ + + + +$ (عند $\frac{-1}{2}$) ، $\searrow$ ثم $\nearrow$

مثال : جد بعدي أكبر مستطيل يمكن ان يوضع داخل مثلث طول قاعدته $(24\ cm)$ وارتفاعه $(18\ cm)$ بحيث أن رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين تقعان على ساقيه . وزاري ٢٠١٣/د٢

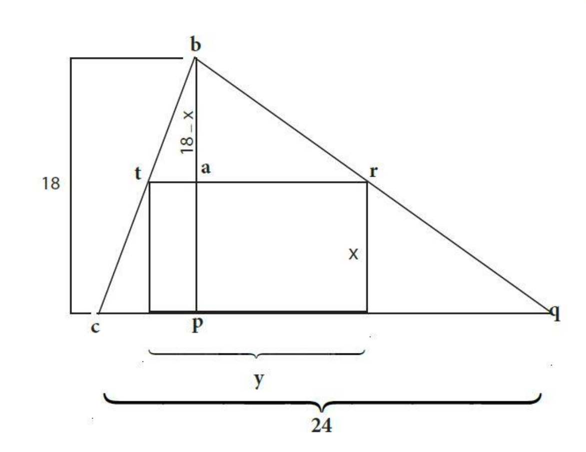
الحل :

الفرضية : نفرض بعدي المستطيل : x , y

الدالــــة : مساحة المستطيل = حاصل ضرب بعديه

$$A = x\,y$$

العلاقــــة : تشابه المثلثان btr , bcq (لتساوي زواياهما المتناظرة لذا تتناسب اضلاعهما المتناظرة وكذلك ارتفاعاهما)



$$\frac{tr}{cq} = \frac{ba}{bq} \Rightarrow \frac{y}{24} = \frac{18-x}{18}$$

$$y = \frac{24}{18}(18-x) \Rightarrow y = \frac{4}{3}(18-x)$$

$$\therefore A = xy = x\left(\frac{4}{3}(18-x)\right)$$

$$A = \frac{4}{3}(18x - x^2)$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{4}{3}(18-2x) \quad \left(\frac{dA}{dx} = 0\right)$$

$$\left[\frac{4}{3}(18-2x) = 0\right] \div \frac{3}{4}$$

$$18 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = 9$$

$$y = \frac{4}{3}(18-9) = 12$$

∴ بعدي المستطيل هما $9 , 12$

مثال : صنع صندوق مفتوح من قطعة النحاس مربعة الشكل طول ضلعها $12\ cm$ وذلك بقص اربعة مربعات متساوية الابعاد من اركانها الاربعة ثم ثني الاجزاء البارزة منها ، ما هو الحجم الاعظم لهذه العلبة ؟

الحل : وزاري ٢٠١٥ / د١

الفرضية : نفرض طول الضلع المربع المقطوع $= x$

ابعاد الصندوق $= (12-2x , 12-2x , x)$

الدالـــة : الحجم = حاصل ضرب الابعاد الثلاثة

العلاقـــة : لا نحتاج الى علاقة لأن المعادلة تحتوي على متغير واحد

$12-2x$

x

$12-2x$ $\quad 0 < x < 6$

x

$$v = (12-2x)(12-2x)x$$

$$v = (144 - 24x - 24x + 4x^2)x$$

$$v = x(144 - 48x + 4x^2)$$

$$v = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

$$\frac{dv}{dx} = 144 - 96x + 12x^2 \quad \left(\frac{dv}{dx} = 0\right)$$

$$[144 - 96x + 12x^2 = 0] \div 12$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x-2) = 0$$

either $x = 6$ لا يمكن

or $\boxed{x = 2}$

$$v = 2(12-4)^2 = 128\ cm^2$$

اشارة $\acute{f}(x)$	$+ + + + +$ ↗	2	$- - - - - - -$ ↘	6	$+ + + + +$ ↗

مثال : مخروط دائري قائم مولده $9\sqrt{3}\ cm$ جد ارتفاعه لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن . وزاري ٢٠٠٠ / د١

الحل :

الفرضية : نفرض ارتفاع المخروط $= h$ ، نفرض نصف قطر المخروط $= r$

الدالـــة : حجم المخروط

العلاقـــة : نضرية فيثاغورس

الدالة $v = \frac{\pi}{3} r^2 h$

العلاقة $r^2 + h^2 = (9\sqrt{3})^2$

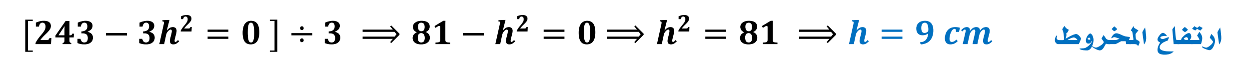
نعوض في الدالة $r^2 = 243 - h^2$

$$v = \frac{\pi}{3}(243 - h^2)h$$

$$v = \frac{\pi}{3}(243h - h^3)$$

$$v' = \frac{\pi}{3}(243 - 3h^2) \qquad (v' = 0)$$

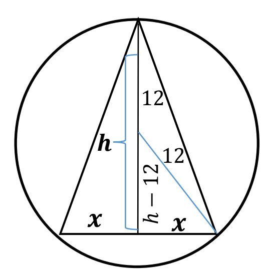
$$[\frac{\pi}{3}(243 - 3h^2) = 0] \div \frac{\pi}{3}$$



$[243 - 3h^2 = 0\ ] \div 3 \ \Rightarrow 81 - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 81 \ \Rightarrow h = 9\ cm$ ارتفاع المخروط



مثال : جد بعدي اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن ان يوضع داخل دائرة نصف قطرها $12cm$ ثم برهن ان نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$



الحل :

الفرضية : نفرض ارتفاع المثلث $= h$ ، نفرض طول قاعدة المثلث $= 2x$

الدالـــة : مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

العلاقـــة : المثلث القائم الزاوية $r^2 = (h - 12)^2 + x^2$

$$A = \frac{1}{2}\ 2xh$$

$$A = xh \dots\dots (1)$$

$$(12)^2 = (h^2 - 24h + 144) + x^2$$

$$144 = h^2 - 24h + 144 + x^2$$

$$h^2 - 24h + x^2 = 0$$

$$x^2 = 24h - h^2$$

$x = \sqrt{24h - h^2}$ ....(2) نعوض (٢) في (١)

$A = h\sqrt{24h - h^2}$

$A = \sqrt{24h^3 - h^4}$

$\frac{dA}{dh} = \frac{72\,h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}}$ $(\frac{dA}{dh} = 0)$

$[72\,h^2 - 4h^3 = 0\,] \div 4$

$18\,h^2 - h^3 = 0$

$h^2(18 - h) = 0$

$either\ h^2 \Rightarrow h = 0$ يهمل

$or\quad 18 - h = 0 \Rightarrow h = 18$ نعوض في (٢)

$x = \sqrt{24h - h^3}$

$x = \sqrt{24(18) - (18)^2} = \sqrt{(18)\,(24 - 18)} = \sqrt{(18)\,(6)} = \sqrt{108}$

$x = 6\sqrt{3}\ cm$

$2x = 2\,(6\sqrt{3}\,) = 12\,\sqrt{3}\,cm$ طول القاعدة

$A = x\,h\ = 6\sqrt{3}\,(18) = 108\sqrt{3}\,cm$ مساحة المثلث

$A = \pi\, r^2$ مساحة الدائرة

$A = \pi(12)^2 = 144\,\pi$

$\frac{\text{مساحة المثلث}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{108\sqrt{3}}{144\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

مثال : مجموع محيطي دائرة ومربع $(60\ cm)$ أثبت أنه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين أصغر ما يمكن فأن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع .

الحل :

الفرضية : نفرض طول ضلع المربع $= x$ ، نفرض نصف قطر الدائرة $= r$

الدالـــة : المساحة = مساحة المربع + مساحة الدائرة

العلاقـــة : محيط المربع + محيط الدائرة $= 60\ cm$

$A = x^2 + \pi r^2$

$[\,4x\ + 2\pi r = 60] \div 2 \Rightarrow 2x + \pi r = 30$

$\pi r = 30 - 2x \Rightarrow r = \frac{30 - 2x}{\pi}$

$\therefore A = x^2 + \pi r^2 = x^2 + \pi\left(\frac{30-2x}{\pi}\right)^2$

$\therefore A = x^2 + \frac{1}{\pi}(30-2x)^2 = x^2 + \frac{1}{\pi}(900 - 120x + 4x^2)$

$\frac{dA}{dx} = 2x + \frac{1}{\pi}(-120+8x) \qquad \left(\frac{dA}{dx} = 0\right)$

$2x + \frac{1}{\pi}(-120+8x) = 0 \;] \div \frac{\pi}{2}$

$x\pi - 60 + 4x = 0 \Rightarrow x\pi + 4x = 60 \Rightarrow x(\pi+4) = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{\pi+4}$ طول ضلع المربع

قطر الدائرة $= 2r = 2\left[\frac{1}{\pi}(30-2x)\right] = \frac{2}{\pi}\left(30 - 2\frac{60}{\pi+4}\right) = \frac{2}{\pi}\left(30 - \frac{120}{\pi+4}\right)$

قطر الدائرة $= \frac{2}{\pi}\left(\frac{30\pi+120-120}{\pi+4}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{30\pi}{\pi+4}\right) = \left(\frac{60}{\pi+4}\right) \qquad \therefore x = 2r$

مثال : جد نقطة أو نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0,4)$.

الحل : وزاري ٢٠١١ /د٢ وزاري ٢٠١٣ / د١

الفرضية : نفرض ان النقطة $p(x,y)$ هي من نقط المنحني $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0,4)$.

الدالــــة : قانون المسافة بين نقطتين

العلاقــــة : معادلة القطع الزائد

$S = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$

$y^2 - x^2 = 3$ العلاقة

$S = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16}$

$x^2 = y^2 - 3 \ldots\ldots(*)$ نعوض في قانون المسافة

$S = \sqrt{(y^2-3) + y^2 - 8y + 16}$

$S = \sqrt{2y^2 - 8y + 13}$

$\frac{dS}{dy} = \frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}} \qquad \left(\frac{dS}{dy} = 0\right)$

$\frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}} = 0$

$4y - 8 = 0 \Rightarrow 4y = 8 \Rightarrow y = 2 \qquad (*)$ نعوض في

$x^2 = (2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \qquad$ النقاط $(1,2), (-1,2)$

ملاحظات :

١- يمكن القول عن دالة المساحة في بعض الاحيان أكبر أو أصغر مسطح للشكل .

٢- يمكن القول ان دالة الحجم أو السعة في بعض الاحيان أكبر أو أصغر مجسم للشكل .

حل تمارين (6 – 3)

س1/ جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب احدهما في مربع الآخر اكبر ما يمكن .

الحل :

الفرضية : نفرض العدد الاول $x =$ ، نفرض العدد الثاني $y =$

الدالـــة : L= حاصل ضرب العدد الأول × مربع العدد الثاني

العلاقـــة : مجموع العددين $x + y = 75$

$$L = x.y^2 \quad \dots\dots\dots(1)$$
$$x + y = 75$$
$$x = 75 - y \quad \dots\dots\dots(2)$$
$$L = (75 - y).y^2$$
$$L = 75y^2 - y^3$$
$$L' = 150y - 3y^2 \qquad (L' = 0)$$
$$[150y - 3y^2 = 0] \quad (\div 3)$$
$$50y - y^2 = 0 \quad \Rightarrow y(50 - y) = 0$$

$either \quad y = 0$ يهمل

$or \quad 50 - y = 0 \Rightarrow y = 50$ العدد الثاني نعوض في معادلة (٢)

$x = 75 - 50 = 25$ العدد الأول

س2/ جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}\ cm$. وزاري ٢٠١٢ / د٣

الحل :

الفرضية : نفرض الارتفاع $2h =$ ، نفرض نصف قطر الاسطوانة $r =$ ، نفرض الحجم $V =$

الدالـــة : قانون حجم الاسطوانة (هي التي نقوم باشتقاقها)

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = r^2\pi.2h \quad \dots\dots(1)$$

العـــلاقة : نظرية فيثاغورس على المثلث القائم ABC

$$h^2 + r^2 = (4\sqrt{3})^2$$
$$h^2 + r^2 = 48$$
$$r^2 = 48 - h^2 \quad \dots\dots(2)$$

نعوض معادلة (٢) في (١)

$$V = 2\pi(48 - h^2)h$$

$V = 2\pi(48L - h^3)$

$\acute{V} = 2\pi(48 - 3h^2) \qquad (\acute{V} = 0)$

$[2\pi(48 - 3h^2) = 0] \qquad (\div 2\pi)$

$[48 - 3h^2 = 0] \div 3 \Rightarrow 16 - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 16$

$either\ h = -4$ تهمل

$or \quad h = 4$ نعوض في (٢)

$r^2 = 48 - h^2 = 48 - 16 \Rightarrow r^2 = 32 \Rightarrow r = 4\sqrt{2}$ نصف قطر الاسطوانة

$2h = 2(4) = 8\ cm$ ارتفاع الاسطوانة

س3 / جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة قطرها $4\sqrt{2}cm$. وزاري ٢٠١٢ / د١

الحل :

الفرضية : نفرض طول المستطيل $= 2x$ نفرض عرض المستطيل $= y$ نفرض مساحة المستطيل $= A$

الدالـــة : قانون مساحة المستطيل (هي التي نقوم باشتقاقها)

العـــلاقة : نظرية فيثاغورس على المثلث القائم ABC

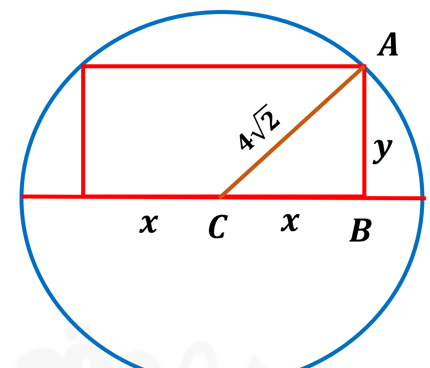
$A = 2x \cdot y \qquad \ldots\ldots(1)$

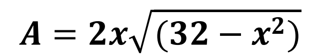
$x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2$

$x^2 + y^2 = 32$

$y^2 = 32 - x^2$

$y = \sqrt{32 - x^2} \qquad \ldots\ldots(2)$ نعوض معادلة (٢) في (١)





$A = 2x\sqrt{(32 - x^2)}$

$A = 2\sqrt{32x^2 - x^4}$

$\acute{A} = \dfrac{(2)[64x - 4x^3]}{2\sqrt{32x^2 - x^4}} \Rightarrow \acute{A} = \dfrac{[64x - 4x^3]}{\sqrt{32x^2 - x^4}} \qquad (\acute{A} = 0)$

$\dfrac{[64x - 4x^3]}{\sqrt{32x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow [64x - 4x^3 = 0]\ (\div 4) \Rightarrow x\,(16 - x^2) = 0$

$either \quad x = 0$ تهمل

$or \quad 16 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

$either \quad x = -4$ تهمل

$or \quad x = 4$

$2x = 2(4) = 8\ cm$ طول المستطيل نعوض في (٢)

$y = \sqrt{32-16} = \sqrt{16} = 4\ \text{cm}$ عرض المستطيل

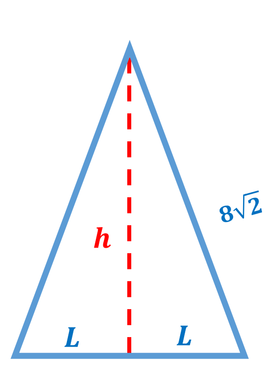
س4/ جد ابعاد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $= 8\sqrt{2}cm$.

الحل :

الفرضية : نفرض ارتفاع المثلث $= h$ ، نفرض طول ضلع المثلث $= 2L$ ، نفرض مساحة المثلث $= A$

الدالـــة : قانون مساحة المثلث (هي التي نقوم باشتقاقها) مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

العـــلاقة : مبرهنة فيثاغورس



$$A = \frac{1}{2}.2L.h$$

$$A = L.h \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$h^2 + L^2 = (8\sqrt{2})^2$$

$$h^2 + L^2 = 128$$

$$h^2 = 128 - L^2$$

$$h = \sqrt{128 - L^2} \quad \dots\dots.(2)$$ نعوض (٢) في (١)

$$A = L.\sqrt{128 - L^2}$$

$$A = \sqrt{128L^2 - L^4}$$

$$\acute{A} = \frac{256L - 4L^3}{2\sqrt{128L^2 - L^4}} \qquad (\acute{A} = 0)$$

$$\frac{256L - 4L^3}{2\sqrt{128L^2 - L^4}} = 0$$

$$[256L - 4L^3 = 0] \quad (\div 4)$$

$$L(64 - L^2) = 0$$

$either \quad L = 0$ تهمل

$or \quad L^2 = 64 \Rightarrow L = \pm 8$

$L = -8$ تهمل $\Rightarrow L = 8$ نعوض في (٢)

$2L = 2\ (8) = 16\ cm$ طول ضلع المثلث

$h = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} = 8cm$ الارتفاع

$A = L\ h = (8)8\ =\ 64\ cm^2$

س5 / جد اقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $16\ cm^2$.

الحل :

الفرضية : نفرض طول المستطيل $x =$ نفرض عرض المستطيل $y =$ نفرض مساحة المستطيل $A =$
نفرض محيط المستطيل $P =$

الدالـــة : هي محيط المستطيل (هي التي نقوم باشتقاقها)   محيط المستطيل = 2 × (الطول+ العرض)

العـــلاقة : مساحة المستطيل

$$P = 2(x + y) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$A = xy \Rightarrow 16 = xy \Rightarrow y = \frac{16}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$ نعوض (٢) في (١)

$$P = 2\left(x + \frac{16}{x}\right)$$

$$P = 2(x + 16x^{-1})$$

$$P = 2x + 32x^{-1}$$

$$P' = 2 - 32x^{-2} \qquad (p' = 0)$$

$$[2 - 32x^{-2} = 0] \qquad (\div 2)$$

$$1 - 16x^{-2} = 0 \implies 1 - \frac{16}{x^2} = 0 \implies \frac{16}{x^2} = 1 \implies x^2 = 16$$ بالجذر

$$x = \pm 4 \implies x = -4$$ تهمل

$$x = 4$$ نعوض في (١)

$$y = \frac{16}{4} = 4$$

$$P = 2(4 + 4) = 16\ cm$$

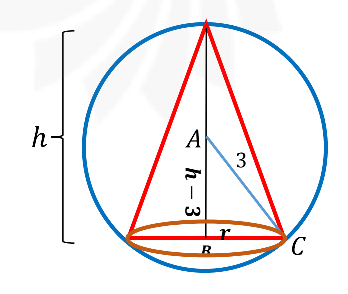
س6 / جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطر ها 3 cm .

الحل :

الفرضية : نفرض نصف قطر المخروط $r =$ ، نفرض ارتفاع المخروط $h =$ ، نفرض حجم المخروط $V =$

الدالـــة : قانون حجم المخروط

العـــلاقة : مبرهنة فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية ABC



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$r^2 + (h - 3)^2 = (3)^2$$

$$r^2 + h^2 - 6h + 9 = 9$$

$$r^2 = 6h - h^2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(6h - h^2)h = \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$$

$V' = \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) \qquad (V' = 0)$

$[\frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) = 0] \quad (\times 3)$

$12h\pi - 3h^2\pi = 0 \quad (\div 3\pi)$

$4h - h^2 = 0 \Rightarrow h(4 - h) = 0$

$either \quad h = 0$ تهمل

$or \quad 4 - h = 0 \Rightarrow h = 4$ نعوض في معادلة (٢) الارتفاع

$r^2 = 6(4) - (4)^2 = 24 - 16 = 8$

$r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ نصف القطر

$V = \frac{1}{3}\pi(8)(4) = \frac{32}{3}\pi\ cm^3$

س7 / جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة $B(6\,,8)$ والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول اصغر مثلث .

الحل :

الفرضية : نفرض النقطة $(x, 0)$ نقطة تقاطع المستقيم مع المحور السيني

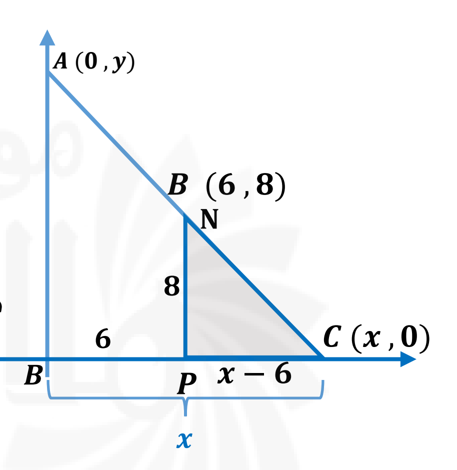
نفرض النقطة $(0\,,y)$ نقطة تقاطع المستقيم مع المحور الصادي

نفرض أبعاد المثلث $= x\,,y$ نفرض مساحة المثلث $= A$

الدالــــة : قانون مساحة المثلث

العـــلاقة : قانون الميل (ميل $\overline{AC}$ = ميل $\overline{BC}$) ، النقطة $B(6\,,8)$ تنتمي للمستقيم $\overline{AC}$

$$A = \frac{1}{2}x.y \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$



$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \left(\frac{y-8}{0-6} = \frac{8-0}{6-x}\right)$ طرفين في وسطين

$(y-8)(6-x) = -48 \Rightarrow 6y - xy - 48 + 8x = -48$

$6y - xy + 8x = 0$

$y(6-x) = -8x \Rightarrow y = \frac{-8x}{6-x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ نعوض في (١)

$A = \frac{1}{2}x.y = \frac{1}{2}x\,\frac{-8x}{6-x} = \frac{-4x^2}{6-x} \ldots\ldots\ldots (3)$ نشتق

$$A' = \frac{(6-x)(-8x) - (-4x^2)\,(-1)}{(6-x)^2} = \frac{-48x + 8x^2 - 4x^2}{(6-x)^2}$$

$$A' = \frac{-48x + 4x^2}{(6-x)^2} \qquad (A' = 0)$$

$\frac{4x^2 - 48x}{(6-x)^2} = 0 \Rightarrow [\,4x^2 - 48x = 0] \;(\div 4)$

$x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(x-12) = 0$

$either\ x = 0$ تهمل

$or \quad x - 12 = 0 \Rightarrow x = 12$

$y = \frac{-8\,(12)}{6-12} = \frac{-8\,(12)}{-6} = 16$

$(12\,,0)$ نقطة تقاطع المستقيم مع المحور السيني ، $(0\,,16)$ نقطة تقاطع المستقيم مع المحور الصادي

$m\,\overline{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-0}{6-12} = \frac{8}{-6} = \frac{-4}{3}$

$(y - y_1) = m(x - x_1)$

$(y-8) = \frac{-4}{3}(x-6) \overset{\times 3}{\Rightarrow} 3y - 24 = -4(x-6)$

$3y - 24 = -4x + 24$

$4x + 3y - 48 = 0$

س8 / جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات ، رأسان من رؤسه على المنحني والرأسان الاخران على محور السينات ، ثم جد محيطه .

الحل :

الفرضية : نفرض طول المستطيل $= 2x$ نفرض عرض المستطيل $= y$ نفرض مساحة المستطيل $= A$

الدالـــة : قانون مساحة المستطيل مساحة المستطيل = الطول × العرض

العلاقـــة : المعادلة $y = 12 - x^2$

$A = 2x\,.y \ \ldots\ldots\ldots(1)$

$y = 12 - x^2 \ \ldots\ldots(2)$ نعوض (٢) في (١)

$A = 2x(12 - x^2)$

$A = 24x - 2x^3$

$A' = 24 - 6x^2 \qquad (A' = 0)$

$24 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = 4$

$x = \mp 2 \quad \Rightarrow \quad x = -2$ تهمل ، $x = 2$

$2x = 4\ cm$ الطول

$y = 12 - x^2 \Rightarrow y = 12 - (2)^2 = 12 - 4 = 8$

$P = 2(2x + y)$

$P = 4x + 2y = 4(2) + 2(8) = 8 + 16 = 24\ cm$

س9 / جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه $(8\ cm)$ وطول قطر قاعدته $(12\ cm)$.

الحل :

الفرضية : نفرض ارتفاع الاسطوانه $h =$ ، نفرض نصف قطر قاعدتها $r =$ ، نفرض حجم المخروط $V =$

الدالـــة : الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

العلاقـة : تشابه المثلثان $(ADE\ ,ABC)$

$V = r^2\pi h\ \ldots\ldots\ldots(1)$

$\frac{8}{8-h} = \frac{6}{r}$

$8r = 6(8-h)$

$8r = 48 - 6h \quad (\div 2)$

$4r = 24 - 3h$

$3h = 24 - 4r$

$h = \frac{24-4r}{3}\ \ldots\ldots\ldots..(2)$ نعوض في (١)

$V = r^2\pi h = r^2\pi\left(\frac{24-4r}{3}\right)$

$V = \frac{\pi}{3}(24r^2 - 4r^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(48r - 12r^2) \qquad (V' = 0)$

$\frac{\pi}{3}(48r - 12r^2) = 0$

$[16\pi r - 4\pi r^2 = 0] \qquad (\div 4\pi)$

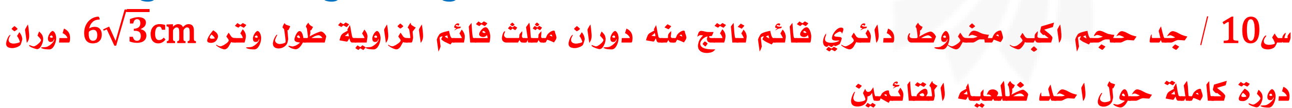
$4r - r^2 = 0$

$r(4 - r) = 0$

$either \quad r = 0$ يهمل

$or \quad 4 - r = 0 \Rightarrow r = 4\ cm$

$h = \frac{24-4(4)}{3} = \frac{24-16}{3} = \frac{8}{3}$



س10 / جد حجم اكبر مخروط دائري قائم ناتج منه دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $6\sqrt{3}$cm دوران دورة كاملة حول احد ظلعيه القائمين

الحل :

الفرضية : نفرض ارتفاع المخروط $h =$ ، نفرض نصف قطر قاعدته $r =$ ، نفرض حجم المخروط $V =$

الدالـــة : قانون حجم المخروط

العلاقــة : مبرهنة فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية

$$V = \frac{1}{3} r^2\, \pi h \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$h^2 + r^2 = (6\sqrt{3})^2$$

$$r^2 = 108 - h^2 \dots\dots\dots (2)$$

نعوض معادلة (٢) في (١)

$$V = \frac{1}{3}(108 - h^2)\, \pi h$$

$$V = \frac{\pi}{3}(108h - h^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{3}(108 - 3h^2) \qquad (V' = 0)$$

$$36\pi - h^2\pi = 0 \overset{\div \pi}{\Longrightarrow} 36 - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 36 \Rightarrow h = \pm 6$$

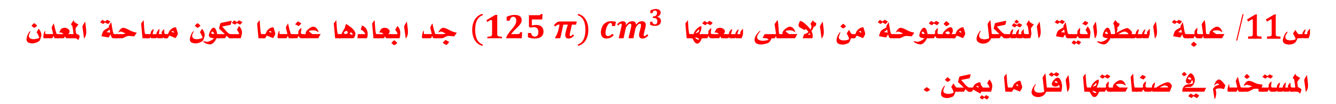
$either \quad h = -6$ يهمل

$or \quad h = 6$ نعوض في (٢)

$$r^2 = 108 - 6^2 = 108 - 36 = 72$$

$$r = \sqrt{72}\ cm$$

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}(72)(6) = \frac{72 \times 6\pi}{3} = 144\pi\ cm^3$ أكبر حجم للمخروط



س11/ علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الاعلى سعتها $(125\,\pi)\ cm^3$ جد ابعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صناعتها اقل ما يمكن .

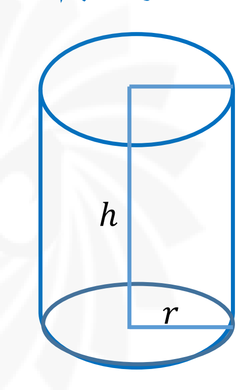
الحل :

الفرضية : نفرض ارتفاع الاسطوانة $= h$ ، نفرض نصف قطر الاسطوانة $= r$

نفرض المساحة الكلية بدون غطاء $= A$ ، نفرض حجم الاسطوانة $= v$

الدالــــة : قانون المساحة   المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة قاعدة واحدة

العلاقــة : قانون حجم الاسطوانة   الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع



$$A = 2r\,\pi h + r^2\pi \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$v = r^2\pi h \Rightarrow 125\,\pi = r^2\pi h$$

$$h = \frac{125}{r^2} \qquad \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$A = 2r\,\pi h + r^2\pi$$

$$A = 2r\,\pi\left(\frac{125}{r^2}\right) + r^2\pi$$

$$A = 250\,\pi\, r^{-1} + r^2\pi$$

$$A' = -250\pi r^{-2} + 2r\pi \qquad (A' = 0)$$

$$\frac{-250\pi}{r^2} + 2r\pi = 0 \xrightarrow{(\div 2\pi)} \frac{-125}{r^2} + r = 0 \Rightarrow \frac{125}{r^2} = r$$

$r^3 = 125 \Rightarrow r = 5\ cm$ نعوض في (٢)

$$h = \frac{125}{25} = 5\ cm$$

س12 / خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فإذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعته $108\ m^2$ جد أبعاد الخزان لكي يكون حجمه أكبر ما يمكن علماً ان الخزان ذو غطاء كامل .

الحل :

الفرضية : نفرض عرض القاعدة $= x$ ، نفرض طول القاعدة (ضعف عرضها) $= 2x$ ، نفرض الارتفاع $= y$

نفرض حجم الخزان $= V$

الدالـــة : حجم الخزان

العلاقـــة : مساحة المعدن = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$V = (2x)(x)(y) = 2x^2y$ ……..(1)



$108 = \underbrace{2\,(2x + x)}_{\text{محيط القاعدة}}\, y + 2\,(2x)\,(x)$

$108 = 2\,(3x)y + 4x^2 \quad (\div 2)$

$54 = 3xy + 2x^2$

$3xy = 54 - 2x^2$

$y = \frac{54 - 2x^2}{3x}$ ………(2) نعوض معادلة (٢) في (١)

$$V = 2x^2\,\frac{54 - 2x^2}{3x} = \frac{2}{3}\,(54x - 2x^3)$$

$$V' = \frac{2}{3}\,(54 - 6x^2) \qquad (V' = 0)$$

$$\frac{2}{3}\,(54 - 6x^2) = 0 \overset{\times\frac{3}{2}}{\Rightarrow} 54 - 6x^2 = 0 \ (\div 6)$$

$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3\ m$ عرض القاعدة

$2(3) = 6\ m$ طول القاعدة

$y = \frac{54 - 2(9)}{3(3)} = \frac{36}{9} = 4\ m$ الارتفاع

حل التمارين العامة الخاصة بالفصل الثالث

س5/ جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

a) $x^3y^2 - 2y = 5x + 3$
b) $y = \sin 4x \tan 2x$
c) $y = e^{x^2} \ln |2x|$
d) $y = \tan(\cos x)$
e) $y = x^2 \ln |x|$
f) $y = \ln(\tan^2 x)$
g) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
h) $y = \cos(e^{\pi x})$

الحل :

a) $x^3y^2 - 2y = 5x + 3$ نشتق حاصل ضرب دالتين

$$x^3 . 2y . \frac{dy}{dx} + y^2 . 3x^2 - 2 . \frac{dy}{dx} = 5 + 0$$

$$2x^3y . \frac{dy}{dx} - 2 . \frac{dy}{dx} = 5 - 3x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx}(2x^3y - 2) = 5 - 3x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 3x^2y^2}{2x^3y - 2}$$

b) $y = \sin 4x \tan 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \sin 4x . \sec^2 2x\,(2) + \tan 2x . \cos 4x\,(4)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin 4x . \sec^2 2x + 4\tan 2x . \cos 4x$$

c) $y = e^{x^2} \ln |2x|$ حاصل ضرب دالتين

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}\left(\frac{1}{2x}\right) 2 + \ln|2x| . e^{x^2} . 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} e^{x^2} + 2x\, e^{x^2} \ln|2x|$$

d) $y = \tan(\cos x)$

هذه دالة واحدة فقط حيث أن $\cos x$ هي زاوية $\tan$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(\cos x)(-\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x\, \sec^2(\cos x)$$

e) $y = x^2 ln\,|x|$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + ln\,|x| \cdot 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = x + 2x\,ln\,|x|$$

f) $y = ln\,(tan^2 x)$

$$y = ln\,(tan\,x)^2 \qquad \boxed{ln\,x^n = n\,ln\,x}$$

$$y = 2\,ln\,(tan\,x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\,\frac{1}{tan\,x} \cdot sec^2 x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,sec^2 x}{tan\,x}$$

g) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x}).\left(e^x + e^{-x}.(-1)\right) - (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}.(-1))}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x}).(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2}$$ نفتح الاقواس

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{2x} - 2\,e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}) - (e^{2x} + 2\,e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} - e^{2x} - 2 - e^{-2x}}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$$

h) $y = cos\,(e^{\pi x})$

$$\frac{dy}{dx} = -sin\,(e^{\pi x})\ \underbrace{e^{\pi x} \cdot \pi}_{\text{مشتقة الزاوية}}$$

س6/ استخدم مبرهنة رول ثم مبرهنة القيمة المتوسطة لإيجاد قيم c للدالة

$f(x) = x^4 - 2x^2 \ ,\ x \in [-2, 2]$

الحل : أولا :

١) الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-2\,, 2]$ لأنها كثيرة الحدود .

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-2\,, 2)$ لأنها كثيرة الحدود

٣) نجد $f(2)\ ,\ f(-2)$

$$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 = 16 - 8 = 8$$

$f(2) = (2)^4 - 2(2)^2 = 16 - 8 = 8$ $\boxed{f(2) = f(-2)}$

$f(x) = x^4 - 2x^2$

$\acute{f}(x) = 4x^3 - 4x$

عندما تكون مبرهنة رول متحققة فإنه يوجد على الاقل قيمة واحدة لـ c بحيث أن $\acute{f}(c) = 0$

$\acute{f}(c) = 4c^3 - 4c$ $\acute{f}(c) = 0$

$4c^3 - 4c = 0 \Rightarrow 4c(c^2 - 1) = 0$

$either\ \ 4c = 0 \Rightarrow c = 0 \in (-2, 2)$

$or\ \ c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1 \in (-2, 2)$

ثانيا : الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \acute{f}(c)$$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{8-8)}{2-(-2)} = \frac{0}{4} = 0$ ميل الوتر

$f(x) = x^4 - 2x^2$

$\acute{f}(x) = 4x^3 - 4x$

$\acute{f}(c) = 4c^3 - 4c$ ميل المماس ميل المماس = ميل الوتر

$4c(c^2 - 1) = 0$

$either\ \ \ 4c = 0 \Rightarrow c = 0 \in (-2, 2)$

$or\ \ \ c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1 \in (-2, 2)$

س7/ $f(x) = ax^2 - 4x + 5$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1, b]$ فإذا كانت $c = 2$ تنتمي الى الفترة $(-1, b)$ جد قيمة $a, b \in R$

الحل :

$\because$ الدالة f تحقق شروط مبرهنة رول $f(a) = f(b)$

$f(x) = ax^2 - 4x + 5$

$f(-1) = a(-1)^2 - 4(-1) + 5$

$f(-1) = a + 9$

$f(b) = ab^2 - 4b + 5$

$\because f(-1) = f(b)$

$\therefore a + 9 = ab^2 - 4b + 5$

$\therefore a = ab^2 - 4b - 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$

$f(x) = ax^2 - 4x + 5$

$\acute{f}(x) = 2ax - 4$

$\acute{f}(c) = 2ac - 4$ لدينا $c = 2$

$\acute{f}(c) = 2a\,(2) - 4 = 4a - 4$ $\acute{f}(c) = 0$

$\therefore\ 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$ نعوض في معادلة (1)

$1 = (1)b^2 - 4b - 4$

$b^2 - 4b - 5 = 0$

$(b - 5)(b + 1) = 0$

$either\ b - 5 = 0 \Rightarrow b = 5$

$or\ b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$ تهمل $(b > -1)$

س8/ متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاث أمثال طول قاعدته ، جد الحجم التقريبي له عندما يكون طول قاعدته $2.97\ cm$.

الحل : نفرض طول القاعدة $= x$ ، نفرض الارتفاع $= h$ $\therefore h = 3x$

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = x^2 . h$

$V = x^2 . 3x$

$f(x) = 3x^3$

نفرض اقرب رقم للعدد المعطى $a = 3$, $b = 2.97$

$h = b - a = 2.97 - 3 = -0.03$

$f(a) = 3a^3$

$f(a) = 3 . (3)^3 = 3 . 27 = 81$

$f(x) = 3x^3$

$\acute{f}(x) = 9x^2$

$\acute{f}(3) = 9\,(3^2) = 81$

$f(a + h) = f(a) + h . \acute{f}(a)$

$f\big(3 + (-0.03)\big) = f(3) + (-1)\acute{f}(3)$

$f(2.97) = 81 + (-0.03)\,81 = 81 - 2.43 = 78.57\ cm^3$

س9 / مخروط دائري قائم حجمه $210\,\pi\, cm^3$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته اذا كان ارتفاعه $10\ cm$. وزاري ٢٠١٣ / د٢

الحل : حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi\, h$$

$$210\,\pi = \frac{1}{3} r^2 \pi\ .10 \Rightarrow 210 = \frac{r^2}{3}(10)$$

$$r^2 = \frac{210\,(3)}{10} \Rightarrow r^2 = 21\,(3) \Rightarrow \therefore\ r^2 = 63 \Rightarrow r = \sqrt{63}\ cm$$ طول نصف القطر

أصبح السؤال جد تقريبا مناسبا للمقدار $\sqrt{63}$

$a = 64$ نفرض

$b = 63$

$h = b - a = 63 - 64 = -1$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(a) = \sqrt{64} = 8$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\acute{f}(a) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{2\,(8)} = \frac{1}{16} = 0.06$$

$f(a+h) = f(a) + h\,.\,\acute{f}(a)$ القيمة التقريبية

$f\big(64 + (-1)\big) = 8 + -1\,.(0.06) = 8 - 0.06 = 7.94$

س10/ اذا كانت $f(x) = \sqrt[5]{31x+1}$ جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية لـ $f(1.01)$.

الحل :

$f(x) = \sqrt[5]{31x+1}$

نفرض اقرب رقم للعدد المعطى $a = 1$ ، $b = 1.01$

$h = b - a = 1.01 - 1 = 0.01$

$f(a) = f(1) = \sqrt[5]{31\,(1) + 1} = \sqrt[5]{32} = 2$

$f(x) = (31x+1)^{\frac{1}{5}}$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{5}\,(31x+1)^{\frac{-4}{5}}(31)$

$$\acute{f}(a)=\frac{1}{5}(31a+1)^{\frac{-4}{5}}(31)\Rightarrow \acute{f}(1)=\frac{1}{5}(31(1)+1)^{\frac{-4}{5}}(31)=\frac{31}{5}(32)^{\frac{-4}{5}}$$

$$\acute{f}(a)=\frac{31}{5}(2^5)^{\frac{-4}{5}}=\frac{31}{5}2^{-4}=\frac{31}{5}.\frac{1}{16}=\frac{31}{80}=0.3875$$

$$f(a+h)=f(a)+h.\acute{f}(a)$$

$$f(1+0.01)=2+0.3875.(0.01)$$

$$f(1.01)=2+0.003875=2.003875$$

س11 / باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني البياني للدالة $yx^2=1$

الحل :

الدالة $yx^2=1\Rightarrow y=\frac{1}{x^2}$

1) أوسع مجال $=R\setminus\{0\}$ $x^2=0\Rightarrow x=0$

2) نقاط التقاطع مع المحورين

عندما $x=0\Rightarrow y=\frac{1}{0}$ غير معرفة

عندما $y=0\Rightarrow \frac{1}{x^2}=0\Rightarrow 1=0$ غير ممكن   لا توجد نقاط تقاطع مع المحورين

3) التناظر : الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل لأن $f(-x)\neq -f(x)$

الدالة متناظرة مع محور الصادات لأن $f(-x)=f(x)$

4) المحاذيات : مستقيم محاذي عمودي $x^2=0\Rightarrow x=0$

مستقيم محاذي أفقي $y=\frac{0}{1}\Rightarrow y=0$

5) مناطق التزايد والتناقص

$$y=\frac{1}{x^2}\Rightarrow \acute{y}=\frac{x^2.0-1(2x)}{x^4}$$

$\acute{y}=\frac{-2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3}\neq 0$ لا توجد نهايات

الدالة متناقصة في $\{x: x<0\}$

الدالة متزايدة في $\{x: x>0\}$

(خط الأعداد: $+ + + + + +$ ↗ | 0 | ↘ $- - - - - -$)

6) مناطق التحدب والتقعر

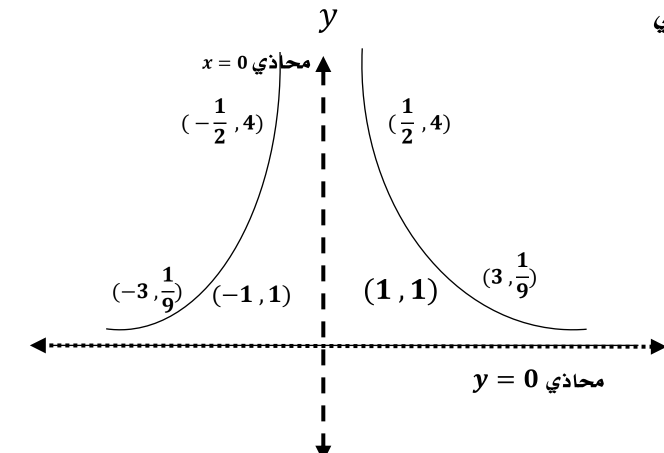
(خط الأعداد: $+ + + + + + +$ ∪ | 0 | ∪ $+ + + + + + +$)

$$\acute{y}=\frac{-2}{x^3}$$

$$\acute{y}=\frac{x^3.0-(-2).3x^2}{(x^3)^2}\Rightarrow \acute{y}=\frac{6}{x^4}\neq 0$$

الدالة مقعرة في الفترتين $\{x: x<0\}$, $\{x: x>0\}$

7) الرسم البياني



x	y	(x, y)
1	1	$(1, 1)$
-1	1	$(-1, 1)$
$\pm\frac{1}{2}$	4	$(\pm\frac{1}{2}, 4)$
±2	$\frac{1}{4}$	$(\pm2, \frac{1}{4})$

القوانين المستخدمة في الفصل الثالث

١) المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

٢) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ مساحة قاعدة واحدة

٣) محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢

٤) مساحة المستطيل = الطول × العرض

٥) مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

٦) محيط المربع = ٤ × طول الضلع

٧) محيط الدائرة = $2r\pi$

٨) مساحة الدائرة = $r^2\pi$

٩) مساحة الكرة = $4\pi r^2$

١٠) حجم الاسطوانة = $r^2\pi\, h$

١١) حجم الكرة = $\frac{4}{3}r^3\pi$

١٢) الميل M = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

١٣) حجم المخروط = $\frac{1}{3}r^2\pi h$

١٤) حجم المكعب = L^3 حيث L طول الضلع

١٥) المساحة السطحية للمكعب = 4 × (طول الضلع)^2

١٦) المساحة الكلية للمكعب = 6 × $(\text{طول الضلع})^2$

١٧) المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات = محيط القاعدة × الارتفاع (القاعدة مستطيلة) اي محيط المستطيل

١٨) المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + مساحة قاعدتين

١٩) حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

٢٠) محيط المثلث = مجموع أطوال اضلاعه الثلاثة

٢١) مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

٢٢) مساحة المثلث المتساوي الاضلاع = $\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$ أو $\frac{\sqrt{3}}{4}(\text{طول الضلع})^2$

٢٣) قانون المسافة = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

٢٤) شبه المنحرف = مجموع اطوال اضلاع الاربعة

٢٥) مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ (مجموع ضلعيه المتوازيين) × الارتفاع



تم بحمد الله